



利息理论

S.G.凯利森 著　尚汉冀 译

上海科学技术出版社

李大潜主编

《保险精算丛书》

利 息 理 论

S.G.Kellison 著

尚 汉 冀 译



上海科学技术出版社

内 容 简 介

利息理论应用数学工具对金融保险业务中与利息有关的方面进行定量的分析。其内容包括利息的度量与利息问题的求解，年金，收益率，分期偿还表和偿债基金，债券与其他证券，以及一些对利息和现代金融业务的相当深入的分析研究。本书兼顾理论和实际应用，对于金融保险专业人员有重要的参考价值，也可用作高等学校中有关专业的教材或参考书。

S. G. Kellison
The Theory of Interest
(Second Edition)
RICHARD D. IRWIN, INC.

《保险精算丛书》
利 息 理 论
S.G.凯利森 著
尚 汉 冀 译
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号)
常熟市印刷八厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 16.25 字数 416 000
1995年11月第1版 1998年11月第2次印刷
印数 2 001－4 000
ISBN7－5323－4155－0/O·195
定价：37.90 元
如遇印装质量问题，可直接向承印厂调换
地址：常熟市梅李镇通江路21号 邮编：215511

《保险精算丛书》编委会

《保险精算丛书》前言

保险，作为商品社会中处理风险的一种有效方法，已被全世界所普遍采纳。在现代保险业蓬勃发展的进程中，科学的理论和方法，特别是精确的定量计算，起着十分重要的作用。保险业运营中的一些重要环节，如新险种的设计、保险费率和责任准备金的计算、分保额的确定、养老金等社会保障计划的制定等等，都需要由精算师 (Actuary) 依据精算学 (Actuarial Science) 原理来分析和处理。有鉴于此，许多发达国家都以法律形式规定，保险公司的营业报告必须由精算师签字方为有效。这也是国家对保险业进行调控管理的一种手段。

所谓精算学，实际上是将数学方法应用于金融保险所形成的一套理论体系。它的基础包括精算数学、利息理论、风险理论、人口数学、修匀数学、生存模型和生命表构造等等，还包括一些更专门的内容。这一套理论的重要性和正确性，已经得到国际社会的公认。

在我国，虽然早在 1949 年就由中央人民政府批准成立了中国人民保险公司，但是，由于种种历史原因，在相当长一段时间内我国的保险业发展缓慢，人才培养远不能适应实际需要。特别是精算学的研究和精算人才的培养，未得到应有的重视。在保险业的实际运作中，也很少严格按照精算学的原理办事。这一切都影响了我国保险业的进一步发展及与国际接轨。这种情况已引起保险界、教育界和学术界的注意，正在采取积极措施改变现状。刚刚颁布的《保险法》更明确规定："经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。"在此情况下，迫切需要引进国际上先进的精算学

理论，并结合我国的实际加以应用，本丛书就是在这样的背景下翻译出版的。

《保险精算丛书》（第一辑）是由复旦大学数学系、中国人民保险公司上海市分公司（以下简称人保上海分公司）合作翻译的，由上海科学技术出版社出版。全国政协副主席、中科院院士苏步青为丛书题写书名；复旦大学研究生院院长、中科院院士李大潜担任丛书主编；中国人民保险公司上海市分公司总经理何静芝、副总经理钱建中，上海市新闻出版局局长徐福生担任丛书总顾问。上海是我国保险业的发源地之一，历来是保险业的中心。成立于 1950 年的人保上海分公司，经过 45 年艰难曲折的发展，业务有了很大开拓， 1994 年已实现业务收入 30 亿元人民币，占上海保险市场的 80% 。根据市场的需要，公司已开办了财产、人身、责任、信用四大类约 200 多个险种。特别是作为公司主要业务之一的国内人身保险业务， 1994 年的业务收入已近 12 亿元。公司所开设的人身险种类也从 1982 年时的一种，扩展到各种形态的医疗保险、定期和终身保险及责任不同的各种人身意外伤害保险等多个品种，并逐步形成系列化。上海保险市场虽然在不断扩大，但竞争也日趋激烈。特别是一些实力雄厚的国际著名大保险公司的进入，促使国内各保险公司采取有力措施不断提高从业人员的业务素质，包括学习精算知识和培养精算人才。正是由于这样的需要，人保上海分公司决定与复旦大学数学系联手，在上海科学技术出版社的积极支持下，翻译了这套《保险精算丛书》。

复旦大学数学系不仅在数学的基础理论研究方面成就卓著，而且历来重视数学在国民经济中的应用，并取得多项重大研究成果。近年来，他们为了拓宽数学应用的领域，又开辟了精算学研究的新方向，并进行了大量的实际工作。他们在数学系研究生和本科生中开设了有关精算的课程和专题讨论，努力培养精算人才；他们还与各大保险公司合作，从事保险精算实际课题的研究，招收应用数学（保险）大专班，举办面向社会的保险精算培训班，培

训了一批人员参加 A.S.A (北美精算师学会准会员) 资格考试 (该项考试的上海考点就设在复旦大学内), 并于第一期考试中取得通过率超过 90% 的优异成绩。与人保上海分公司合作翻译这套《保险精算丛书》，不仅是复旦数学系理论和实践相结合的一项新的举措，也是他们面向社会培养国家急需的精算人才的重要措施。

"保险精算丛书" (第一辑) 共六本，分别为：

《利息理论》, S.G. 凯利森著, 尚汉冀译;

《风险理论》, N.L. 鲍尔斯著, 郑韫瑜、余跃年译;

《精算数学》, N.L. 鲍尔斯著, 余跃年、郑韫瑜译;

《人口数学》, R.L. 布朗著, 郑培明译;

《修匀数学》, D. 伦敦著, 徐诚浩译;

《生存模型》, D. 伦敦著, 陈子毅译。

所依据的原书均是北美精算师学会 (Society of Actuaries) 为其准会员 (A.S.A) 资格考试所指定的教材和参考书，具有一定的权威性。阅读这套丛书，不论对读者了解和掌握精算学基本原理并应用于保险业实践，还是对读者准备参加 A.S.A 资格考试 (该项考试在中国的北京、上海、天津、长沙等地已设有考点), 均会有很大帮助。

保险精算在我国是一项刚刚起步的新事物，这套丛书是高等院校、保险公司和出版社三方共同合作，编写翻译出版学术水平较高、填补国家缺门的专业书籍的一种有益的探索。我们热诚希望广大读者提出宝贵意见，以利于我们改进工作，做好这套丛书的出版工作，促进保险精算事业在中国的发展。

编者谨识

1995 年 11 月于上海

第一章 利息的度量

§1.1 引 言

“利息”一词可以定义为向人借资本以供自用者给予出借资本者的报酬。这样，利息可被视为借款者付给出借者的租金，用以赔偿出借者由于不再能使用这笔出借的资本而蒙受的损失。从理论上说，资本和利息不一定要是同类的东西。例如，农夫 A 可以出借一台拖拉机给农夫 B, 用以收割 B 的小麦，而 B 则用收割到的小麦的一定的百分比给 A 作为回报。在这个例子中，拖拉机是资本而一部分小麦则是利息。然而，在几乎所有的实际应用中，资本和利息都是用货币来表示的。

在第一章中，将分析利息的各种定量的度量。本章中包括了利息度量中所涉及的大多数基本原则。第二章至第八章则详细描述这些基本原则并将其拓展到更复杂的金融业务之中。这些章节研究计算利息及借款方向贷款方偿还本金和利息的各种方法。

第一至第八章在本质上涉及利息在决定性基础上的*数学理论*。第九章向读者介绍利息的*经济与金融*理论及相关的论题。最后，第十章则是从*随机*的角度而不是*决定性*的角度来处理利息。

§1.2 积累函数与金额函数

一笔通常的金融业务可视为投资一定数量的钱款以产生利息。例如，某人可在银行投资于一储蓄帐户。初始投资的金额（资本）称为*本金*, 而过了一定时期后收到的总金额称为*积累值*, 积累值与本金的差额就是*利息的金额*, 也就是投资期间所得到的*利*

息。

现在让我们假定，一旦给定了原始投资的本金数额，则在此后任何时刻的积累值均可确定下来。我们还假定在投资期间不再加入或抽回本金，也就是说，资金数额的任何变化严格地说都是由利息的效应而造成的。以后我们将会放松这一假设而允许在投资期间加入或抽回本金。

设 t 为从投资之日算起的时间，在理论上，时间可以用许多不同的单位来度量，例如，日、月、十年等等。用来度量时间的单位称为“*度量时期*”或“*时期*”。最常用的度量时期是 1 年，以后除非另外申明均假设如此。

考虑投资 1 单位的本金。我们将原始投资为 1 时在任何时刻 t 的积累值定义为 *积累函数* $a(t)$ 。这个函数具有哪些性质呢？

1. 显然 $a(0)=1$ 。

2. $a(t)$ 通常是递增函数。当 t 增加时函数值减少将意味着利息为负。虽然负利息在数学上是可能的，但实际遇到的大多数情形不会如此。然而，确实在有些情况下会出现负利息，例如，一笔投资资金在经过一定时间后却亏本了。函数值为常数将意味着利息为零，这种现象偶然也会发生。

3. 如果利息象通常那样连续增加，此函数将为连续函数。然而，确实也有这样的情形：利息在支付日期之间并不连续增加，此时 $a(t)$ 具有间断性。

一般说来，原始投资不是 1 单位而是金额为 $k>0$ 。今定义一个 *金额函数* $A(t)$, 它给出原始投资为 k 时在时刻 $t \geq 0$ 的积累值。于是有

$$A(t)=k \cdot a(t) \tag{1.1}$$

及

$$A(0)=k.$$

上面所列举的 $a(t)$ 的第 2 条和第 3 条性质显然对 $A(t)$ 也是成立的。

将从投资日起第 n 个时期所得到利息金额记为 I_n 。则

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{对整数} n \geq 1. \tag{1.2}$$

应当指出 I_n 包括着利息在一个时间区间内的效应，而 $A(n)$ 则是在某一特定时刻的量。

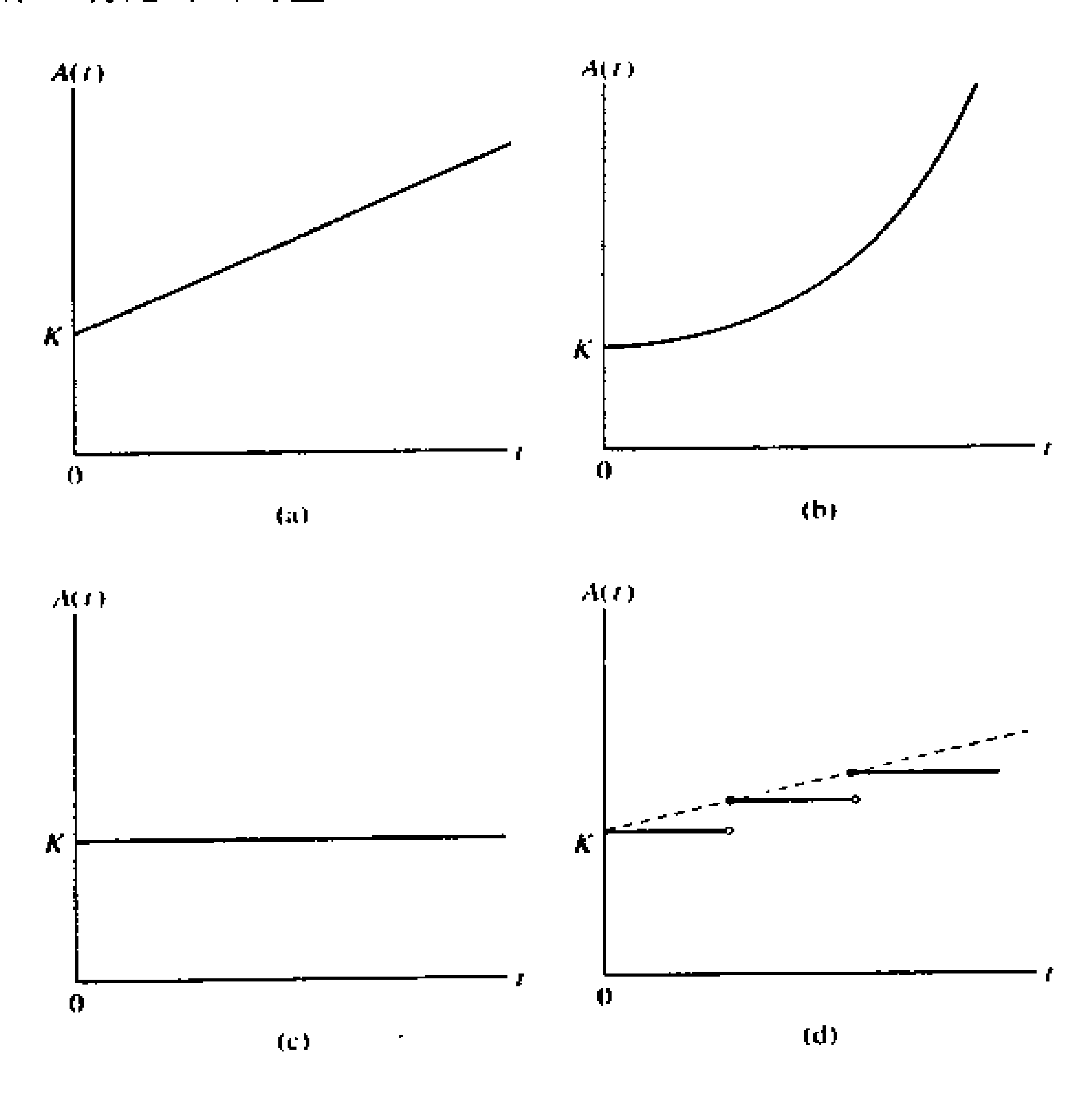


图 1.1　四例金额函数

实际上，积累函数可视为金额函数取 $k=1$ 的特殊情形。然而，积累函数本身也是足够重要，以致在本章的余下部分保持它

单独的定义。在许多情形下，积累函数和金额函数可以互相替换使用。

图 1.1 表示金额函数的四个例子。图 (a) 是一线性金额函数。图 (b) 是非线性的，此处为一指数曲线。图 (c) 为一水平的金额函数，即斜率为零。这一图形表示这样一种金额函数，其本金不产生利息。图 (d) 所示的金额函数，其利息不是连续地产生，而是在离散的时段内产生，在利息的支付日期之间不产生利息。

在下节中，将从积累函数展开利息的各种度量。在实践中，两种特定的积累函数可应付出现的大多数情形；虽然如此，读者仍应理解本节中定义的一般积累函数的性质，并能运用它。

§1.3 实质利率

利息的第一种度量称为*实质利率*，并记为 i，其精确定义为：

实质利率 i 是指在某一时期开始时投资 1 单位本金时，在此时期内应获之利息，此处利息是在期末支付的。

注意从积累函数来看，此定义等价于说

$$i = a(1) - a(0)$$

或

$$a(1) = 1 + i. \tag{1.3}$$

对此定义以下几点是重要的：

1. “实质”一词的使用在直观上是不明显的。用于利率的这一术语是指利息在每一度量时期之末支付。这与“名义”利率不同，后者 (在 1.8 节中考虑) 利息的支付比每个度量时期一次更为频繁。

2. 实质利率常用百分比来表示，例如 $i = 8\%$ 。实质利率作为百分比这一概念与前面给出的实质利率定义并无矛盾，在那个定义中利率为一定的金额，而象 8% 可以视为 .08 本金单位。

3. 本金在整个时期内视为常数，即在此期间既无新的本金加入也不抽回本金。

4. 实质利率是一种度量，其中利息在期末支付。这种叙述的重要意义并非一望而知，但在 1.7 节中将变得明显起来，在那一节中将描述一种利息在期初支付的状况。

实质利率也可用金额函数来确定如下：

$$\begin{aligned} i &= \frac{(1+i)-1}{1}=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)} \\ &= \frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I_1}{A(0)}. \end{aligned} \tag{1.4a}$$

这样就可给出另外一种定义：

实质利率 i 是某时期内得到利息的金额与此时期开始时投资的本金金额之比。

前面所讲的四点对此定义也同样适用。

实质利率可以对任何度量时期进行计算。设 i_n 为从投资日算起的第 n 个时期的实质利率，则

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A_{n-1}} \quad \text{对整数} n\geq 1. \tag{1.4b}$$

由此看来，公式 (1.4a) 中的 i 表示为 i_1 更为合适。

虽然公式 (1.4b) 允许对不同的 n 有不同的实质利率 i_n，但在 1.5 节中将说明，对某一种非常重要的积累函数来说，实质利率对各个连续度量时期，即所有整数 $n\geq 1$ 保持为常数。

§1.4 单 利

前面已指出， $a(0)=1$ 及 $a(1)=1+i$ 。有无穷多种积累函数会通过这两点。其中有两种在实际中最为重要。本节将讨论第一种即单利，而 1.5 节中将讨论第二种即复利。

考虑投资 1 单位，使在每一时期中得到的利息为常数。1 单位的积累值在第一时期末为 $1+i$, 在第二时期末为 $1+2i$, 如此等等。这样，对一般情形，我们有线性积累函数

$$a(t)=1+it \quad \text{对整数} t \geq 0. \tag{1.5}$$

象这种类型产生的利息称为 *单利* 。

容易指出，常数单利并不意味着实质利率也为常数。设 i 为单利的利率，而 i_n 为第 n 时期的实质利率 (按 1.3 节的定义) 。则有

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} \\ &= \frac{[1+in]-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)} \\ &= \frac{i}{1+i(n-1)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

对于整数 $n \geq 1$, 它是 n 的递减函数。这样，常数的单利意味着递减的实质利率。

单利的积累函数仅对 $t \geq 0$ 的整数值有定义。然而，可以很自然地将此定义拓展到 $t>0$ 的非整数值。这相当于把利息按比例地分配给一时期内的任何部分。如果是这种情况，金额函数如图 1.1(a) 所示。如果利息仅对一完整的时期才产生，而并不是分配到时期的各部分，则金额函数将是一个有间断的阶梯函数，见图 1.1(d) 。除非另外申明，在单利中，总认为利息是按比例分配到时期的各部分。

对于非整数的 t 值定义 $a(t)$ 的一个更严格的数学方法，可以从我们要求单利具有的下列性质出发：

$$a(t+s)=a(t)+a(s)-1 \quad \text{对} t \geq 0 \text{ 及} s \geq 0. \tag{1.7}$$

本质上，公式 (1.7) 告诉我们，对于单利而言，1 单位的原始投资经过 $t+s$ 时期得到的利息，等于它经过 t 个时期得到的利息加上经过 s 个时期所得到的利息。在公式 (1.7) 中 -1 是需要的，因为假若不然，则在方程右端就会有一个 2 单位的投资了。

假设 $a(t)$ 为可导，由导数定义有

$$
\begin{aligned}
a'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{[a(t)+a(s)-1]-a(t)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{a(s)-1}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s}\\
&= a'(0),\ \text{这是一个常数。}
\end{aligned}
$$

在上式中以 r 代 t, 并将等式两端从 0 到 t 积分，就有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t a'(r)dr &= \int_0^t a'(0)dr\\
a(t)-a(0) &= t\cdot a'(0)\\
a(t) &= 1+t\cdot a'(0).
\end{aligned}
$$

若取 $t=1$ 并记得 $a(1)=1+i$, 则有

$$a(1)=1+i=1+a'(0),$$

因而 $a'(0)=i$ 。

将此代回原式有类似的结果

$$a(t)=1+it \quad \text{对} t\geq 0. \tag{1.5}$$

上述推导并不依赖于 t 为正整数，而是对一切 $t\geq 0$ 为有效。

例 1.1　若单利年息为 8%, 求投资 \$2000 在 4 年后的积累值。

答案为 $2000[1+(0.08)(4)]=\$2640$ 。注意所得利息金额为 $2640-2000=\$640$ 。这可以由 $2000(0.08)(4)$ 或一般地 $A(0)\cdot it$ 得到。在初中与高中里也讲过类似的结果，只是所用的符号不同。

$$I=Prt.$$

这就是说，利息金额等于本金金额、利率与时期的乘积。

§1.5　复　利

单利具有这样的性质：利息并不再投资以赚取附加的利息。例如，考虑 \$100 的本金以 10% 的单利投资 2 年。对于单利而言，投资者在两年中每一年末将收入 \$10, 但实际上，投资者在第 2 年中是有 \$110 可用以投资的。显然，如果用 10% 的利率投资 \$110 将会更好，因为投资者将在第 2 年收入 \$11 而不是 \$10 。

复利 理论用假设得到的利息自动再投资来处理这个问题。"复" 这个词在这里是指利息再投资以得到额外利息的过程。对复利而言，在任何时候本金和到该时为止得到的利息，总是都用去投资。

现在需要对复利找出积累函数。考虑投资 1, 它在第一时期末积累值为 $1+i$ 。这一余额 $1+i$ 可以在第二时期开始时作为本金，并在第二时期内赚取利息 $i(1+i)$ 。第二时期末的余额将为 $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$ 。类似地，余额 $(1+i)^2$ 可作为第三时期开始时的本金并在第三时期内赚取利息 $i(1+i)^2$ 。第三时期末的余额将为 $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$ 。将此过程无限地继续下去我们得到

$$a(t)=(1+i)^t \quad \text{对整数} t\geq 0. \tag{1.8}$$

可以看出，常数的复利利率意味着实质利率也为常数，而且两者是相等的。设 i 为复利利率，而 i_n 为按 1.3 节定义的第 n 时期的实质利率，则有

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{(1+i) - 1}{1} = i.$$

它不依赖于 n 。这样，虽然定义不同，复利利率与实质利率其实是相等的。

刚才得到的这个结果可以与 1.3 节中得到的结果相比较。在那里，单利的常数利率意味着递减的实质利率。这一结果直观上应该是明显的，因为随着投资时间的加长，单利对于投资者越来越不利。

复利的积累函数至今仅对 $t \geq 0$ 的整数值给出了定义，需要对 $t > 0$ 的非整数值也定义积累函数。可以在类似于 1.4 节中对单利所用的基础上提出这一问题。

我们从要求复利具有的下述性质开始：

$$a(t+s) = a(t) \cdot a(s) \quad 对 t \geq 0 及 s \geq 0. \tag{1.9}$$

本质上，公式 (1.9) 告诉我们，对复利而言，初始投资 1 单位经过 $t+s$ 时期所得到的利息金额，等于这样一种利息金额：若投资在 t 时期末结束，并立即在同一时刻将积累值再投资附加的 s 个时期。

设 $a(t)$ 为可导，则由导数定义得

$$\begin{aligned}
a'(t) &= \lim_{s \to 0} \frac{a(t+s) - a(t)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{a(t) \cdot a(s) - a(t)}{s} \\
&= a(t) \lim_{s \to 0} \frac{a(s) - 1}{s} \\
&= a(t) \cdot a'(0).
\end{aligned}$$

这样

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt}\log_e a(t) = a'(0).$$

在上式中，将 t 换为 r, 并将等式两边从 0 到 t 积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dr}\log_e a(r)dr &= \int_0^t a'(0)dr \\ \log_e a(t) - \log_e a(0) &= t\cdot a'(0) \\ \log_e a(t) = t\cdot a'(0).\end{aligned}$$

(因 $\log_e a(0) = 0$ 。)

若取 $t = 1$ 并记住 $a(1) = 1 + i$, 则有

$$\log_e a(1) = \log_e(1+i) = a'(0).$$

代回原式有

$$\log_e a(t) = t\log_e(1+i) = \log_e(1+i)^t$$

或

$$a(t) = (1+i)^t \quad 对 t \geq 0. \tag{1.8}$$

以上推导并不依赖于 t 为正整数，而是对一切 $t \geq 0$ 均有效。

除非另外申明，此处均假设对复利而言，利息在分数时期也都是按公式 (1.8) 产生的。这样金额函数是指数函数，且示于图 1.1(b) 。金额函数的这种指数形式并非不可预料，因为自然科学中遇到的许多增长曲线都是指数型的。

有些读者可能会感到困惑，因为一方面，我们说利息是在一时期之末支付的，而另一方面，利息又是连续产生的。初看起来，这两种说法是矛盾的。然而，这里其实并无矛盾。因为利息在分数时期也同在整数时期一样严格产生的。既然是这样，任何时刻的积累值在任一种观点下是相等的。

显然单利与复利对单个度量时期会产生同样的结果。对较长时期，复利比单利产生较大的积累值，而对较短时期则相反，这些结论的证明留作习题。

单利与复利的另一个差别是它们的增长形式不同。对于单利来说，它在同样长时期的增长的绝对金额保持为常数；而对于复利来说，则是增长的相对比率保持为常数。用符号来看，就是对单利

$$a(t+s)-a(t)$$

不依赖于 t; 而对复利

$$\frac{a(t+s)-a(t)}{a(t)}$$

不依赖于 t 。

时期达到或超过 1 年的长期金融业务几乎全部使用复利，较短期的业务也常使用复利。单利偶而在短期业务中使用，它有时也用作复利在分数时期内的近似。单利的后一用途，将在 2.2 节中详细讨论。今后，除非另外申明，我们用复利而不是用单利。

本节中有一个隐含的假定，即复利是以与原始投资同样的利率进行再投资。虽然，大多数情形确是如此，但在实际中也有不少再投资利率与原投资利率不同的情形。在 5.4 节中将对再投资利率与原始本金利率不同的情形作出分析。

例 1.2　用复利而不是单利来重新讨论例 1.1 。

答案为

$$2000(1.08)^4=\$2720.98.$$

这一答案与使用单利时的 \$2640 是不同的，多出的 \$80.98 是利息复合的结果。

§1.6　现　时　值

我们已经看到投资 1 在一时期之末将积累到 $1+i$ 。这一项 $1+i$ 常称为*积累因子*, 因为它将在一时期开始时的投资积累到它在一时期结束时的值。

经常需要确定某人在开始时应投资多少，则它在一时期结束时的余额为 1, 此答案为 $(1+i)^{-1}$, 因这一金额将在一时期结束时积累到 1 。我们现在定义一个新的符号 v, 使

$$v=\frac{1}{1+i}. \tag{1.10}$$

此项 v 常称为*贴现因子*, 因为它将一笔投资在一时期结束时的值"贴现"(折扣) 到它在此时期开始时的值。

我们可以将上述结果推广到不止一个时期，也就是说，要确定某人在开始时应投资多少才能在 t 时期末积累到金额为 1 。此答案为积累函数的倒数 $a^{-1}(t)$, 因为此金额在 t 时期末的积累值为 $a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$ 。我们将 $a^{-1}(t)$ 称为*贴现函数* 。

这样，我们对 $t\geq 0$ 得到下述结果：

单利： $a^{-1}(t)=\frac{1}{1+it}$ (1.11)

复利： $a^{-1}(t)=\frac{1}{(1+i)^t}=v^t.$ (1.12)

如前所述，除非另外申明，我们一概用复利。

在某种意义上，*积累*与*贴现*是相反的过程。$(1+i)^t$ 这项被称为 1 在 t 时期末的*积累值* 。而 v^t 这项则被称为在 t 时期末支付 1 的*现时值*(或*贴现值*) 。

如上定义的"积累值"严格地只与过去的付款有关；而"现时值"则严格地只与将来的付款有关。这就是我们使用这些术语的意义。某些作者所用的"现时值"既可以与过去有关，也可以与将来有关；倘若要达到这个目的，则我们将用*当前值* 。

从另一种观点来看待 v^t 与积累函数的联系是有趣的。很明显， v^t 的值将积累函数延拓到 t 的负值。这样，复利的积累函数

对所有 t 均有意义。此函数的图象见图 1.2 。

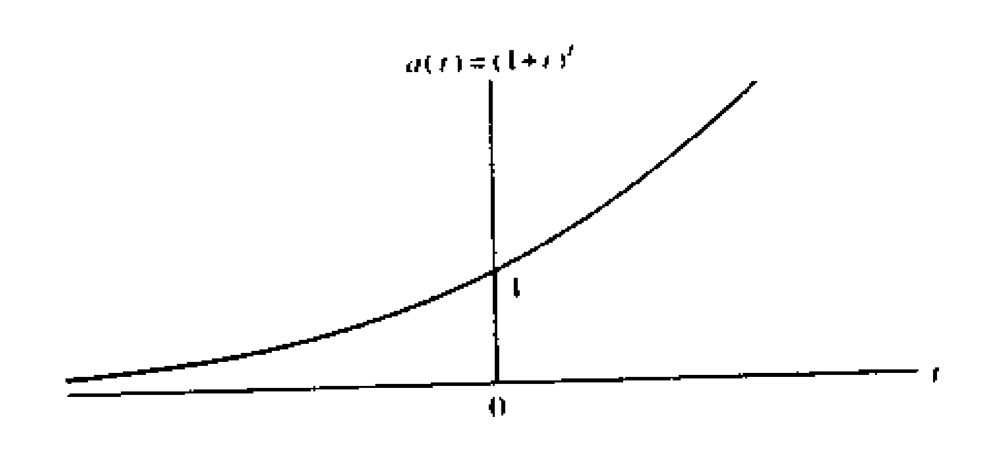


图 1.2　复利的积累函数

例 1.3　试确定开始时按单利年息 9% 投资的金额，以使得在 3 年之末能积累 \$1000 。

此答案为

$$\frac{1000}{1+(0.09)(3)}=\frac{1000}{1.27}=\$787.40.$$

例 1.4　重新讨论例 1.3, 用复利代替单利。

此答案为

$$1000v^3=\frac{1000}{(1.09)^3}=\$772.18.$$

从一般的推理，读者应能说明例 1.3 和例 1.4 答案值的相对大小是合理的。

§1.7　实质贴现率

在 1.3 节中，实质利率被定义为期末支付的利息的度量。在本节中，我们定义实质贴现率，记为 d, 它是作为期初支付的利息的度量。

举一个数值例子，将有助于搞清楚这两者的区别。假如某 A 到一家银行去，以实质利率 6% 向银行借 \$100，期限为 1 年，则银行将给 A \$100 。一年过后， A 将还给银行原始的贷款 \$100，外加 \$6 的利息，共计 \$106 。

然而，假如 A 以实质贴现率 6% 借 \$100，为期 1 年，则银行将预收 6% 的利息，而仅给 A \$94，一年以后 A 还给银行 \$100 。

这样，显然实质利率 6% 与实质贴现率 6% 不是一回事。在上面的例子中， A 在两种情况下都付利息 \$6 。然而，在年底付利息的情形， A 在一年中有 \$100 可用，而在年初付利息的情形， A 在一年中只有 \$94 可用。

还可以从一个稍微不同的角度来看这个问题。在实质利率的情形， 6% 是取为年初余额的百分比；而在实质利率的情形， 6% 是取为年终余额的百分比。这样，我们可以形成一个实质贴现率的精确定义如下：

实质贴现率 d 是在一时期内取得的利息金额 (有时也称为“贴现金额”或“贴现”) 与期末的投资金额之比。

这一定义与 1.3 节中给出的实质利率的另一定义相似。

对此定义以下几点是重要的：

1. 在 1.3 节中对实质利率提出的要点 1, 2, 3 也可用于实质贴现率的定义。

2. *贴现金额* 和 *利息金额* 这两个词可以在包含贴现率的场合通用。

3. 本定义中不用“本金”这个词，因为本金的定义是指在期初的投资金额，而不是在期末的。

4. 实质利率与实质贴现率这两个词的关键区别可归结如下：

(a) 利息 —— 按期初余额计算而在期末支付。

(b) 贴现 —— 按期末余额计算而在期初支付。

有的读者可能会感到在贴现率中用“支付”一词有些含混，因为借款者并没有直接按利率来“付”利息。然而，预先扣除利息

在总结果上与首先借到全部金额，然后借款者立即付出利息并没有什么不同。

事实上，某些读者可能发现“支付”一词在另一种意义下也有些含混。这种含混包含着一种可能，即利息象赚取时一样，以分期付款来“支付”，而不是积累起来以赚取额外的利息。我们并不给上文两种情形中的“支付”一词以这样的涵义。对于那些认为“支付”一词意义不明确的人来说，可能更愿意用“记入贷方”一类词。

实质贴现率可以按任意的度量时期来计算。设 d_n 为从投资日算起第 n 个时期的实质贴现率。有类似于 (1.4b) 的公式

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \quad 对整数 n \geq 1. \tag{1.13}$$

如上所述， I_n 通常可称为“贴现金额”或“利息金额”。一般而言， d_n 可能随不同时期而变化。然而，假若考察复利，其中实质利率是常数，则实质贴现率也是常数。此事的证明留作习题。这些状态称为“复贴现”。这是类似于“复利”的一个术语。

本节前文曾经说过，实质利率为 6% 并不等于实质贴现率为 6% 。然而，在实质利率和实质贴现率之间存在着一个确定的关系。

为推导此关系，我们要定义一个 *等价* 概念如下：

两个贴现率称为等价，如果对给定的投资金额，在同样长时间内两个贴现率产生同样的积累值。

在 1.8 节中将会看到，这一定义不仅可用于实质利率和实质贴现率，也可用于名义利率和名义贴现率。

设某人以实质贴现率 d 借款 1 。则事实上原始本金为 $1-d$，而利息 (贴现) 金额为 d 。然而，从 i 作为利息 (贴现) 金额对本金的比值这一定义来看，我们得到

$$i = \frac{d}{1-d}. \tag{1.14}$$

此公式表示 i 是 d 的函数。

由简单的代数学可知，也可把 d 表示为 i 的函数

$$\begin{aligned} i &= \frac{d}{1-d} \\ i - id &= d \\ d(1+i) &= i \\ d &= \frac{i}{1+i}. \end{aligned} \tag{1.15a}$$

公式 (1.15a) 是显然的，因为它只是实质贴现率定义的再叙述：实质贴现率是本金 1 在一时期内的利息 (贴现) 金额对它在期末投资金额之比。

贴现率 d 和贴现因子 v 间存在重要的关系。有一个关系与 (1.15a) 相同，它是

$$d = iv. \tag{1.15b}$$

这一关系有一个有趣的字面解释。投资 1 赚得的在期初支付的利息是 d, 投资 1 赚得的在期末支付的利息是 i 。于是假如我们依贴现因子 v 从期末向期初贴现 i, 就得到 d 。

d 和 v 间的另一个关系也是常常有用的：

$$\begin{aligned} d &= \frac{i}{1+i} \\ &= \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} \\ &= 1 - v. \end{aligned} \tag{1.16}$$

这一关系也可按字面来解释。写成形式 $v = 1 - d$, 立即可见此方程的两端均表示在期末支付 1 的现时值。

在 i 和 d 之间还有另一个重要关系：

$$d = iv$$

$$= \quad i(1-d)$$
$$= \quad i - id$$

或

$$i - d = id. \tag{1.17}$$

这一关系也可按字面来解释。某人可以借贷 1 而在期末归还 $1+i$, 也可借贷 $1-d$ 而在期末归还 1 。表达式 $i-d$ 是所付利息的差额。此种差额是因为所借本金相差 d 而产生的。金额 d 依利率 i 在一时期末的利息就是 id 。

实质贴现率或复贴现，均假设取复利。然而，也可以类似于定义单利那样来定义 *单贴现* 。考虑这样一种情况：每一时刻所得的贴现金额为常数，于是，在 t 时期期末产生积累值 1 的原始本金应当是：

$$a^{-1}(t) = 1 - dt \quad 对 0 \leq t < 1/d. \tag{1.18}$$

此不等式的第二部分是需要的，以保持 $a^{-1}(t) > 0$ 。这与复贴现不同，在那里现时值是

$$a^{-1}(t) = v^t = (1-d)^t \quad 对 t \geq 0. \tag{1.19}$$

应该指出，公式 (1.14), (1.15), (1.16) 及 (1.17) 均取实质利率与实质贴现率，对于单利和单贴现不再有效，除非投资的时间长度恰为一个时期。

我们曾提醒读者注意，单贴现不等于单利。但单贴现确实具有与单利相类似但反向的性质。以下各条的证明留作习题。

1. 当投资时期加长时，常数的单利利率意味着实质利率递减；而常数的单贴现率则意味着实质贴现率 (与利率) 递增。

2. 单贴现和复贴现对单个时期产生的结果相同。对较长的时期，单贴现比复贴现产生较小的现时值，而对较短的时期则情况相反。

下面从图形中来看这些结果。图 1.3(a) 将单利和复利的积累函数加以比较。图 1.3(b) 则将单贴现和复贴现的贴现函数加以比较。

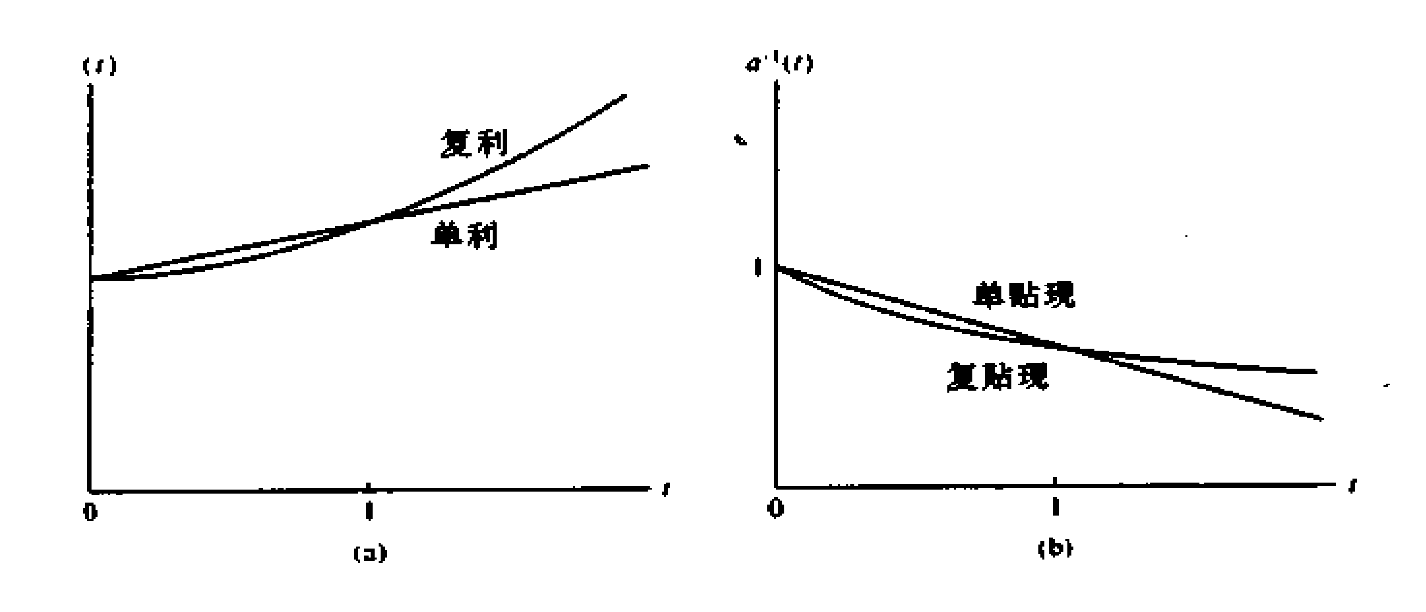


图 1.3　(a) 单利与复利比较。　(b) 单贴现与复贴现比较

单贴现仅在短期业务中使用及用作复贴现在分数时期内的近似。它的应用没有单利那样广泛。

"贴现"一词不幸被用于两个不同的范围，其意义有细微的差别。一个是用于与现时值联系 (贴现因子，贴现函数，贴现过程，贴现值)；而另一个是用于与期初支付的利息相联系 (实质贴现率，贴现金额，复贴现，单贴现)。

不幸，包含"贴现"(discount) 一词的有些术语在实际中常被错用。例如，在贴现过程中，即取现时值，常常使用"贴现率"一词，而其实这时用"利率"才是正确的。"贴现"的另一种使用将在第七章中叙述，其时此词将用于证券，其价格低于偿还值，一般称为"折扣"。

使这种混淆变得更严重的是"贴现"一词的第四种用途，即

用于减价。虽然，本书将不加入此词的这种意义，但在商业和金融业务中确是常常这样用的。毋庸多说，读者应谨慎地使用“贴现”一词以保持其含意清晰，并在可能出现多义性的场合向其他应用此术语者作出澄清。

例 1.5　重新考虑例 1.3，用单贴现代替单利。

答案为

$$1000[1-(0.09)(3)]=\$730.$$

例 1.6　重新考虑例 1.3，用复贴现代替单利，

答案为

$$1000(0.91)^3=\$753.57.$$

请读者按常理比较一下例 1.5 和 1.6 中答案的大小。

§1.8　名义利率与名义贴现率

在 1.3 节和 1.7 节中讨论了实质利率和实质贴现率。术语“实质”是用于利率和贴现率，其中利息为每个度量时期支付一次，或在期末，或在期初，视情况而定。在本节中，我们将考虑在一个时期中利息支付不止一次的情形。这种情形的利率与贴现率称为“名义”的。

许多人曾在实际中遇到过这种情形。例如，贷款人 A 可能开价贷款年实质利率为 9%，贷款人 B 开价季度复利 $8\frac{3}{4}\%$，而贷款人 C 则开价利率 $8\frac{1}{2}\%$，月度预付及转换。多数人可能明白这些利率不能直接相互比较，但他们不知道怎样在这些利率之间作一个有效的比较。

贷款人 A 以年度实质利率开价，这在前面已讨论过了。然而，贷款人 B 是按所谓名义利率开价，而贷款人 C 则是以所谓名义贴现率开价。

有许多术语用来描述这类每一度量时期支付不止一次利息的情形。其中有“付”、“复”及“转换”，例如“季付”、“半年度复

利”及“月度转换”。利息支付及再投资以赚取额外利息的频率*称为“利息转换时期”。

三个词“付”、“复”及“转换”常互相替换来应用。但它们有时对某些使用者确有不同的含义。例如，“复”意味着赚到的利息用于再投资以赚取额外的利息。而“付”意味着利息是以分期付款形式付出的，就象取得利息时一样。术语“转换”看来并不具有上述这两种含义。提醒读者在遇到这些术语时不必深究这些含义，而是要弄清利息是怎样计算和支付的。

本节定义名义利率与名义贴现率，并建立一个系统的方法去确定等价的实质和名义利率和贴现率。“等价”的定义见 1.7 节。

每一时期付 m 次利息的 *名义利率* 的符号为 $i^{(m)}$，其中 m 是 >1 的正整数。所谓名义利率 $i^{(m)}$，我们是指一个每 $1/m$ 时期支付一次的利率，也就是说，对于每 $1/m$ 时期付的利息是 $i^{(m)}/m$，而不是 $i^{(m)}$。例如一个季度转换的 8% 名义利率并不是指每季利率为 8%，而是每季利率为 2%。实际上，我们可以说，每一时期 $i^{(m)}$ 的名义利率就等于每 $1/m$ 时期 $i^{(m)}/m$ 的实质利率。

这样，从等价的定义我们有

$$1+i=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}. \tag{1.20a}$$

因为方程的每一边都给出对一个度量时期投资 1 的积累值。

整理上式，得

$$i=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}-1 \tag{1.20b}$$

及

$$i^{(m)}=m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]. \tag{1.20c}$$

---

* 译者注：此处的“频率”似应为“周期”。

图 1.4 展示了在一个度量时期中以名义利率的积累过程。其中向右的对角线箭头可解释为加号，而向下的箭头则是等号。

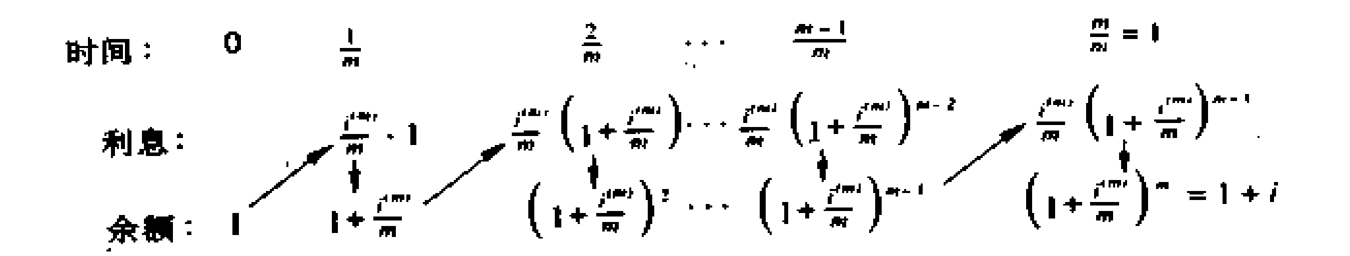


图 1.4　名义利率图

每一时期支付 m 次的 **名义贴现率** 的符号是 $d^{(m)}$ 。对于名义贴现率 $d^{(m)}$，我们是指一个每 $1/m$ 时期支付一次的贴现率，也就是说，对每 $1/m$ 时期的实质贴现率是 $d^{(m)}/m$ 。

名义贴现率 $d^{(m)}$ 是一种在每 $1/m$ 时期之始支付的利息的度量，就好象 d 是在一个时期之始支付的利息的度量一样。由类似于建立 $i^{(m)}$ 和 i 的关系的推导，此处也可建立将 $d^{(m)}$ 与 d 联系的公式，使它们成为等价。

由等价的定义有

$$1-d=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m}. \tag{1.21a}$$

因为方程的两边都给出在一个度量时期末应付 1 的现时值。

重新整理，可得

$$d=1-\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m} \tag{1.21b}$$

及

$$d^{(m)}=m[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}]=m[1-v^{\frac{1}{m}}]. \tag{1.21c}$$

图 1.5 展示了在一个度量时期以某一名义贴现率进行贴现的过程。向左的对角线箭头可解释为减号，而向下的箭头则是等号。

时间：0　$\frac{1}{m}$　…　$\frac{m-2}{m}$　$\frac{m-1}{m}$　$\frac{m}{m}=1$

贴现：

余额：　1

图 1.5　名义贴现率图

在名义利率与名义贴现率之间存在着密切的关系。下述关系成立，因为方程两边均等于 $1+i$，

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}=\left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}. \tag{1.22a}$$

如果 $m=p$，公式 (1.22a) 变为

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-1}. \tag{1.22b}$$

如 $m=1$，则 $i^{(m)}=i$，即实质利率；而如 $p=1$，则 $d^{(p)}=d$，即实质贴现率。这样公式 (1.22a) 可用来寻找等价利率或贴现率，不论是实质的或名义的，可按任何需要的频率转换的。

另一个类似于公式 (1.17) 的联系 $i^{(m)}$ 与 $d^{(m)}$ 的关系是

$$\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}\cdot\frac{d^{(m)}}{m} \tag{1.23}$$

这一结果的字面解释类似对式 (1.17) 的字面解释。其推导留作习题。

在建立上述包含等价利率与贴现率的公式时，在 1.7 节中给出的等价定义是在一个度量时期中比较的。虽然用一个度量时期这一点是随意的，但读者应能检验复利率和复贴现率的等价并不依赖于所选择的比较时期的长短。然而，对其他类型的利息，例如单利和单贴现，利率的等价将依赖于所选择的比较时期的长短。

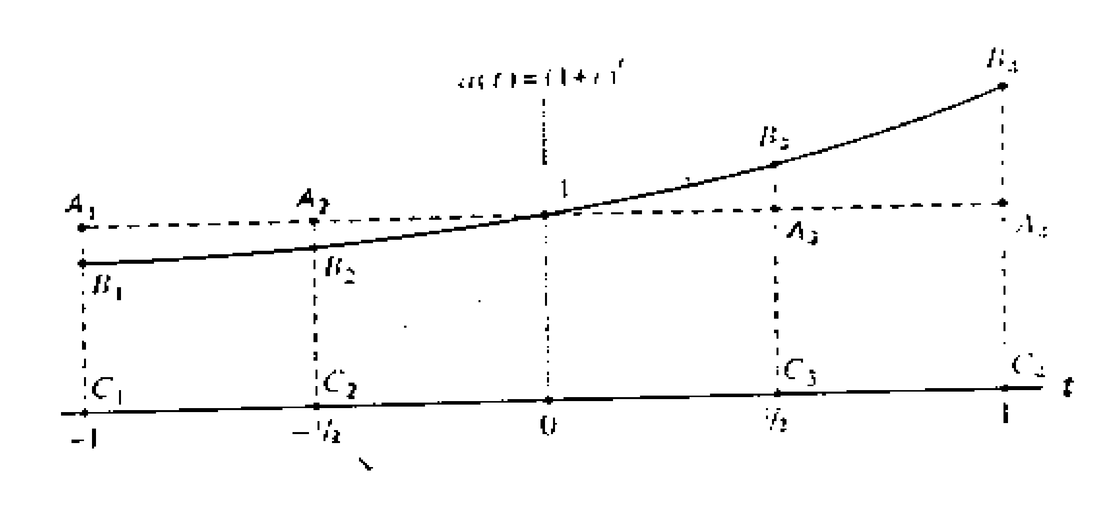


图 1.6　展示名义利率与贴现率的积累函数图

将名义利率和贴现率与积累函数 $a(t)$ 联系起来是很有启发性的。图 1.6 给出了一个 $m=2$ 的例子。读者可自行构造其他的例子。成立下述关系：

$$\begin{aligned}
&A_1B_1 = d & &B_1C_1 = v & &= \left[1-\frac{d^{(2)}}{2}\right]^2\\
&A_2B_2 = \frac{d^{(2)}}{2} & &B_2C_2 = v^{1/2} & &= 1-\frac{d^{(2)}}{2}\\
&A_3B_3 = \frac{i^{(2)}}{2} & &B_3C_3 = (1+i)^{1/2} & &= 1+\frac{i^{(2)}}{2}\\
&A_4B_4 = i & &B_4C_4 = 1+i & &= \left[1+\frac{i^{(2)}}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

指出这样一点是有趣的：名义利率与名义贴现率对单利与单贴现是没有什么关系的。因为利息或贴现的金额是与包含的时间直接成比例的，每 $1/m$ 时期支付的利率或贴现率与一个度量时期支付一次没有区别。

如同“贴现率”一词，“名义”一词不幸也具有多重含义。在

7.3 节中"名义"被用于另一种意义，与证券的收益相联系。在 9.4 节中"名义"又有一种含义，与通货膨胀在利率中的反映有关。

例 1.7　确定 $500 以季度转换 8% 年利投资 5 年的积累值。

答案为

$$500\left[1+\frac{0.08}{4}\right]^{4\cdot 5}=500(1.02)^{20}.$$

应当注意这一情况与某人将 $500 以 2% 利率投资 20 年是相等的。

例 1.8　如以 6% 年利，按半年为期预付及转换，到第 6 年末支付 $1000, 求其现时值。

答案为

$$1000\left[1-\frac{0.06}{2}\right]^{2\cdot 6}=1000(0.97)^{12}.$$

应注意这一情况相当于按 3% 贴现率计算在 12 年末支付 $1000 的现时值。

例 1.9　确定季度转换的名义利率，使它等价于月度转换的 6% 名义贴现年率。

用公式 (1.22a)

$$\begin{aligned}\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^4 &= \left[1-\frac{0.06}{12}\right]^{-12}\\ 1+\frac{i^{(4)}}{4} &= (0.995)^{-3}\\ i^{(4)} &= 4[(0.995)^{-3}-1].\end{aligned}$$

§1.9　利息效力与贴现效力

前面各节定义的利息度量对于度量在规定的时间区间内的利息是有用的。实质利率与实质贴现率是度量在一个度量时期内的利息，而名义利率与名义贴现率则度量 $1/m$ 时期内的利息。

重要的是在很多情形下需要能度量利息在每一时刻，也就是在无穷小时间区间内运行的强度。这种对利息在各别时刻的度量称为*利息效力*。

考虑一笔资金的投资。设在时刻 t 的资金金额由金额函数 $A(t)$ 给出，在此资金中运行的唯一因子是由利息带来的资金增长，即本金既不加入又不撤回。

利息在时刻 t 的运行强度可由 $A(t)$ 曲线在 t 时刻的变化率或斜率来度量。由初等微积分可知， $A(t)$ 曲线在时刻 t 的斜率可由导数在这一点的值给出。

然而，作为利息的度量， $A'(t)$ 是不能令人满意的，因为它还依赖于投资的金额。例如，在相同条件下分别投资 \$200 和 \$100，则 \$200 这笔资金的变化率，将是 \$100 资金变化率的两倍。然而， \$200 资金的利息并不以两倍的强度来运行，事实上，我们可以说这两笔资金是以同样的强度来运行的。

我们可以校正这一点，只要把 $A'(t)$ 用资金在时刻 t 的金额即 $A(t)$ 去除就可以了。这就给出了利息在时刻 t 运行强度的一种度量，它表示为一种独立于资金金额的比率，即作为基金中每一元钱的比率。这种在时刻 t 的利息效力用 δ_t 来记，即定义为

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}. \tag{1.24}$$

应当记得 δ_t 的下述性质：

1. δ_t 是利息在某一确定时刻 t 的强度的度量。

2. δ_t 将此度量表示为每一度量时期的比率。

写出用函数 δ_t 来表示 $A(t)$ 和 $a(t)$ 的值的表达式是可能的。

由 (1.24) 可见 δ_t 的另一表达式为

$$\delta_t = \frac{d}{dt}\log_e A(t) = \frac{d}{dt}\log_e a(t). \tag{1.25}$$

用 r 代 t 并将此式两边在 0 到 t 之间积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta_r dr &= \int_0^t \frac{d}{dr}\log_e A(r)dr \\ &= \log_e A(r)]_0^t = \log_e \frac{A(t)}{A(0)}.\end{aligned}$$

继而有

$$e^{\int_0^t \delta_r dr} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t). \tag{1.26}$$

将公式 (1.24) 写为 $A(t)\delta_t = A'(t)$ 就可推出另一公式。将上式从 0 到 n 积分，得

$$\int_0^n A(t)\delta_t dt = \int_0^n A'(t)dt = A(t)]_0^n = A(n) - A(0). \tag{1.27}$$

公式 (1.27) 有一个相当有趣的字面解释。$A(n) - A(0)$ 这一项是在 n 个度量时期内赚得的利息。而微分表达式 $A(t)\delta_t dt$ 则可解释为由金额 $A(t)$ 在时刻 t 因利息强度 δ_t 而赚得的利息金额。当将此表达式从 0 到 n 积分时，它就给出了 n 个时期中获得的利息总金额。

用导数的定义来分析公式 (1.24)，可以使我们得到对利息效力本质的进一步认识。$A(t)$ 的导数可表示为

$$A'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{h},$$

而由 (1.24) 式可将 δ_t 写为

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{hA(t)}. \tag{1.28}$$

表达式 $\frac{A(t+h)-A(t)}{hA(t)}$ 可视为基于从时刻 t 到时刻 $t+h$ 之间所赚得的利息的利率。例如，假定 $h=1$, 我们有 $\frac{A(t+1)-A(t)}{A(t)}$, 它是资金在一个时期内的增量被期初的资金金额去除。若 $h=1/2$, 我们有 $2\cdot\frac{A(t+1/2)-A(t)}{A(t)}$, 它是半个时期内资金增量的两倍被期初资金金额去除。当 h 趋向于 0, 此表达式的极限，即利息效力，可被描述为基于时刻 t 的利息强度的名义利率。

也可以类似于公式 (1.24) 那样来定义*贴现效力*。为此可用贴现函数 $a^{-1}(t)$ 来代替积累函数 $a(t)$。在时刻 t 的贴现效力，用 δ_t' 来记，其定义为

$$\delta_t' = -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}. \tag{1.29}$$

除掉多一个负号外，δ_t' 的定义与 δ_t 的定义是完全类似的。为使贴现效力之值保持为正，这个负号是必要的。公式 (1.29) 的分母为正，但分子为负，因为 $a^{-1}(t)$ 是一个递减函数。

在本节稍后处，将会见到，贴现效力给出名义贴现率与实质贴现率之间的一个关系，类似于利息效力给出名义利率与实质利率之间的一个关系。然而，可以证明 $\delta_t'=\delta_t$, 故我们可以不用 δ_t' 而只用 δ_t。此证明如下：

$$\begin{aligned}\delta_t' &= -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}\\ &= \frac{a^{-2}(t)\frac{d}{dt}a(t)}{a^{-1}(t)}\\ &= \frac{a^{-2}(t)a(t)\delta_t}{a^{-1}(t)}, \text{由公式 (1.24)}\\ &= \delta_t.\end{aligned}$$

利息效力理论上可以随时变化。然而，在实际中它经常保持为常数。如果利息效力在某时间区间上为常数，则实质利率在此

区间上也为常数。这可在 n 个度量时期上用公式 (1.26) 而得 (n 为正整数)

$$\begin{aligned} e^{\int_0^n \delta_t dt} &= e^{n\delta} \quad 若\delta_t = \delta \quad 对 0 \le t \le n \\ &= a(n) \\ &= (1+i)^n. \end{aligned}$$

所以

$$e^{\delta} = 1 + i \tag{1.30}$$

或

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{1.31a}$$

它将 i 表示为 δ 的函数。

对 (1.30) 取对数表示 δ 为 i 的函数

$$\delta = \log_e(1+i). \tag{1.32a}$$

公式 (1.32a) 也可直接从复利的积累函数导出：

$$\delta = \frac{\frac{d}{dt}(1+i)^t}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t \log_e(1+i)}{(1+i)^t} = \log_e(1+i),$$

它对所有 t 为常数。

公式 (1.31a) 与 (1.32a) 也可写为级数展开的形式：

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots \tag{1.31b}$$

$$\delta = \log_e(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \cdots \tag{1.32b}$$

这两个级数通常收敛很快，因为在实际中 i 和 δ 为很小的正数，其逐次幂快速递减。

将 δ 与 i 联系起来，立即可使 δ 能与本章所叙述过的利息的其他度量联系起来。下述的一系列等式是公式 (1.22a) 的一种拓展形式，它们概括了本章的大部分内容：

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m = 1+i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p} = e^{\delta}. \tag{1.33}$$

在单利和单贴现的情形下来检验一下利息效力是有益的。对单利有

$$\begin{aligned}\delta_t &= \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}(1+it)}{1+it} \\ &= \frac{i}{1+it} \quad \text{对}0 \le t.\end{aligned} \tag{1.34}$$

类似地，对单贴现有

$$\begin{aligned}\delta_t' = \delta_t &= -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} \\ &= -\frac{\frac{d}{dt}(1-dt)}{1-dt} \\ &= \frac{d}{1-dt} \quad \text{对}0 \le t < 1/d.\end{aligned} \tag{1.35}$$

公式 (1.35) 中对 t 值的上界的限制是必要的，这可保证 δ_t 为有限的正值。如同我们所预料的那样，对单利来说，δ_t 为 t 的递减函数，但对单贴现则是 t 的递增函数。

读者也许会感到奇怪，虽然常数的利息效力 δ 会导致实质利率 i 也为常数，但反之未必为真。为了看到这种可能性，考虑 n 个度量时期 (n 为一正整数)，我们又有

$$a(n) = (1+i)^n = e^{\int_0^n \delta_r\,dr}.$$

然而，假若我们将 n 个度量时期上的积分分解为一个度量时期上的积分的和，则有

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= e^{\left[\int_0^1 \delta_t dt+\int_1^2 \delta_t dt+\cdots+\int_{n-1}^n \delta_t dt\right]}\\ &= e^{\int_0^1 \delta_t dt}e^{\int_1^2 \delta_t dt}\cdots e^{\int_{n-1}^n \delta_t dt}.\end{aligned}$$

如果允许 δ_t 在这些度量时期的每一个中这样变动，使所有的一个时期积分相等，则将导致 i 对 n 个时期中的每一个均为常数，但 δ_t 在每一个这样的时期中则是变化的。

探讨这种现象的一个很好的实际例子是：投资 1 历时 n 个时期，其中对完整时期用复利，而对分数时期则用单利。这就产生了一个 $(1+i)^k$ (对 $k=1,2,\cdots,n$) 形式的增长类型，从而实质利率在 n 个度量时期内是常数。然而，δ_t 在每一个这样的度量时期内却是变化的，因为 δ_t 取单利。也可构造出其他的例子来研究这同一件事，但它们一般包含 δ_t 的更为复杂的变化形式。

由 $i^{(m)}$ 来分析 δ_t，可以得到对利息效力本质的另一个有趣的理解。由公式 (1.33)

$$\begin{aligned}\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m &= e^{\delta}\\ i^m &= m\left[e^{\frac{\delta}{m}}-1\right].\end{aligned}$$

由级数展开有

$$\begin{aligned}i^{(m)} &= m\left[\frac{\delta}{m}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3+\cdots\right]\\ &= \delta+\frac{\delta^2}{2!m}+\frac{\delta^3}{3!m^2}+\cdots\end{aligned}$$

取极限 $m\to\infty$，有

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)}=\delta. \tag{1.36}$$

这一公式有直观的解释，既然 $i^{(m)}$ 是每 $1/m$ 时期转换一次的名义利率，则 δ 就可解释为可连续转换的名义利率。

类似地亦可证明

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta. \tag{1.37}$$

此证明留作习题。这公式也有直观的解释。既然 $d^{(m)}$ 是每 $1/m$ 时期转换一次的名义贴现率，则 δ 就可解释为连续转换的名义贴现率。本质上，这是利息效力与贴现效力相等的另一种证明。这一结果的第三种证明留作习题。

利息效力是一种有用的概念化手段，它使复利金额的连续增长类似于自然科学中遇到的增长函数。从理论上说，利息最基本的度量就是利息效力。但在实际上，实质和名义利率与贴现率用得更频繁，因为它们更简单，对于多数人来说更易理解，而且大多数金融业务包含的是离散过程而非连续过程。这并不是说利息效力没有实际意义。除掉它是一种有用的概念化及分析工具以外，它还可在实际中被用作那种转换非常频繁（例如按日计）的利息的近似。近年来，也有某些金融业务确已开始使用连续复利。

例 1.10　确定 \$1000 按利息效力 5% 投资 10 年的积累值。

答案为

$$1000e^{(0.05)(10)} = 1000e^{0.5}.$$

§1.10　变　利　息

本节处理可变利息的情形。考虑两种类型的变化。其他变化类型可按基本原理来分析。

第一种变化类型考虑连续变化的利息效力。在包含变化的利息效力的问题中所用基本公式是 (1.26) 式

$$a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}. \tag{1.26}$$

如果 δ_r 的形式容易积分，则可直接得到结果。如果 δ_r 的形式不容易积分，则需用数值积分方法。

第二种变化类型包含着一个时期中实质利率的变化。这种变化类型可能是实际中最常见的一种类型。象前面一样，记 i_n 为从投资日算起第 n 个时期内的实质利率，则对于整数 $t \geq 1$，有

$$a(t) = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k). \tag{1.38}$$

如果 $i_1 = i_2 = \cdots = i_t = i$，就得到熟知的结果 $a(t) = (1+i)^t$ 。

具有变化实质利率的现时值也可类似地处理。对于整数 $t \geq 1$，有

$$\begin{aligned} a^{-1}(t) &= (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_t)^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^{t} v_k. \end{aligned} \tag{1.39}$$

公式 (1.38) 与 (1.39) 中采用的方法可以很容易地推广到包含名义利率与名义贴现率。所需要做的就是在每一个其利率或贴现率为常数的归类子区间中点数利息转换时期的个数，然后在整个区间中对每一子区间乘上适当的因子。此事留作习题。

在包含变利息的情形下，常需要一个与那些变化的利率水平等价的利率。遇到这种情形时，可直接应用 1.7 节中给出的等价的定义。然而，必须指出此解答依赖于所选择的用以比较的时期的长短。既然利息是变化的，则在某种长度的时期上等价的利率 (或贴现率) 将不同于在另一长度的时期上等价的利率。

例 1.11　如果

$$\delta_t = \frac{1}{1+t},$$

确定 1 在 n 年末的积累值。

用公式 (1.26) 解答为

$$e^{\int_0^n \delta_t dt} = e^{\int_0^n \frac{1}{1+t} dt} = e^{\log_e(1+t)]_0^n} = 1 + n.$$

例 1.12　如果实质利率在头 5 年为 5%, 随之 5 年为 $4\frac{1}{2}$%, 最后 5 年为 4% 。试确定 \$1000 在 15 年末的积累值。

用公式 (1.38), 答案为

$$1000(1.05)^5(1.045)^5(1.04)^5.$$

§1.11　总　结

表 1.1 总结了本章中的许多内容

表 1.1　第一章中关系的总结

利率或贴现率	1 在时刻 t 的积累值 $= a(t)$	1 在时刻 t 的现时值 $= a^{-1}(t)$
复利		
i	$(1+i)^t$	$v^t = (1+i)^{-t}$
$i^{(m)}$	$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{mt}$	$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mt}$
d	$(1-d)^{-t}$	$(1-d)^t$
$d^{(m)}$	$\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-mt}$	$\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{mt}$
δ	$e^{\delta t}$	$e^{-\delta t}$
单利		
i	$1+it$	$(1+it)^{-1}$
单贴现		
d	$(1-dt)^{-1}$	$1-dt$

习　题

§1.2　积累函数与金额函数

1. 考虑金额函数 $A(t) = t^2 + 2t + 3$ 。

a) 确定对应的积累函数 $a(t)$,

b) 校核 $a(t)$ 是否满足积累函数的三条性质，

c) 找出 I_n 。

2. a) 证明 $A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ 。

b) 按字面解释 (a) 中得到的结果。

3. 如果 a) $I_r = r$, b) $I_r = 2^r$, 确定从时刻 t 到时刻 n (设 $t < n$) 赚得的利息金额。

4. 已知 $a(t)$ 的形式为 $at^2 + b$ 。如果在时刻 0 投资 \$100 能在时刻 3 积累到 \$172; 试确定在时刻 5 投资 \$100, 在时刻 10 的积累值。

§1.3　实质利率

5. 假设 $A(t) = 100 + 5t$ 。 a) 确定 i_5, b) 确定 i_{10} 。

6. 假设 $A(t) = 100(1.1)^t$ 。 a) 确定 i_5, b) 确定 i_{10} 。

7. 证明 $A(n) = (1 + i_n)A(n-1)$ 。

8. 若 $A(4) = 1000$ 及 $i_n = 0.01n$, 确定 $A(7)$ 。

§1.4　单利

9. a) 如 \$500 在 $2\frac{1}{2}$ 年内积累到 \$615, 单利的利率为多少？ b) \$500 按 7.8% 的单利要经过多少年可积累到 \$630?

10. 若 i_k 是单利对时期 k 的单利利率 (其中 $k = 1, 2, \cdots, n$), 证明

$$a(n) - a(0) = i_1 + i_2 + \cdots + i_n.$$

11. 如果 \$1000 以某一单利利率经过某一长度的时期积累到 \$1100 。试确定 \$500 以 $\frac{3}{4}$ 大的单利利率经过两倍长的时期的积累值。

12. 某项资金的单利利率为 $i = 4\%$, 问在多长的时期里它会等价于 $2\frac{1}{2}\%$ 的实质利率？

§1.5　复利

13. 设 $0 < i < 1$, 试证明

a) $(1+i)^t < 1 + it$, 如果 $0 < t < 1$ 。

b) $(1+i)^t = 1 + it$, 如果 $t = 1$ 。

c) $(1+i)^t > 1+it$, 如果 $t>1$ 。

这一习题校核了单利和复利经过不同时期后积累值的相对大小。

14. 已知投资 \$600 2 年后得到 \$264 的利息。试确定以相同的复利利率投资 \$2000 在 3 年后的积累值。

15.* 假设 1 以利率 i 投资 n 个时期的积累值与 1 以利率 j 投资 n 时期的积累值的比，等于 1 以利率 r 投资 n 个时期的积累值。确定 r 为 i 和 j 的函数的表达式。

16. 以某一复利利率， 1 会在 a 年内增加到 2, 2 将在 b 年内增加到 3, 3 将在 c 年内增加到 15, 如果 6 将在 n 年内增加到 10, 将 n 表示为 a, b 和 c 的函数。

17. 将一定金额的款项以每季度 3% 的利率投资一年。设 $D(k)$ 为在季度 k 所得复利利息金额与单利利息金额之差 $(k=1,2,3,4)$ 。确定 $D(4)$ 对 $D(3)$ 的比值。

§1.6 现时值

18. 找出从投资日起第 n 个时期的贴现因子的表达式，也就是 $(1+i_n)^{-1}$ 依据金额函数的表达式。

19. 第 n 个时期末支付 1 和第 $2n$ 个时期末支付 1 的现时值之和为 1, 试确定 $(1+i)^{2n}$ 。

20. 试证明 n 个时期以前支付 1 的当前值和 n 个时期以后将支付 1 的当前值之和大于 2 。若 $i>0$ 。

21. 已知 \$500 的投资在第 30 年末将增长到 \$4000 。试确定在 20 年， 40 年， 60 年之末各付款 \$10000 的现时值之和。

§1.7 实质贴现率

22. 投资 A 一年得到的利息金额为 \$336, 而等价的贴现金额为 \$300, 试确定 A 。

23. a) 对于 10% 单利，确定 d_5 。

b) 对于 10% 单贴现，确定 d_5 。

---

* 本题原书 show that 似有误，似应为 It is known that ——— 译者

24. a) 设讨论复贴现，试证 d_n 对所有 n 为常数。

b) 设讨论单贴现，试证若 $0 < n-1 < 1/d$, d_n 为 n 的增函数。

25. 设 $0 < d < 1$, 试证

a) $(1-d)^t < 1 - dt$, 如果 $0 < t < 1$ 。

b) $(1-d)^t = 1 - dt$, 如果 $t = 1$ 。

c) $(1-d)^t > 1 - dt$, 如果 $t > 1$ 。

这一习题校核了对单贴现与复贴现经过不同时期其现时值的相对大小。

26. 如果 i 和 d 为经过 t 个时期后等价的单利率和单贴现率，试证 $i - d = idt$ 。

27. 证明 $\frac{d^3}{(1-d)^2} = \frac{(i-d)^2}{1-v}$ 。

§1.8　名义利率与名义贴现率

28. a) 把 $d^{(4)}$ 表示为 $i^{(3)}$ 的函数。

b) 把 $i^{(6)}$ 表示为 $d^{(2)}$ 的函数。

29. 偶而也会有利息转换次数少于一年一次的情形。定义 $i^{(1/m)}$ 与 $d^{(1/m)}$ 为每 m 年转换一次的名义年利率与名义年贴现率。试对此种情形给出类似于 (1.22a) 的公式。

30. 试确定 \$100 在两年之末的积累值，

a) 如果名义年利率为季度转换 6% 。

b) 如果名义年贴现率为每四年转换一次 6% 。

31. 推导公式 (1.23) 。

32. a) 证明 $i^{(m)} = d^{(m)}(1+i)^{1/m}$ 。

b) 按字面解释 a) 中得到的结果。

33. 如果 $i^{(m)} = 0.1844144$ 及 $d^{(m)} = 0.1802608$, 试确定 m 。

34. 已知

$$1 + \frac{i^{(n)}}{n} = \frac{1 + \frac{i^{(4)}}{4}}{1 + \frac{i^{(5)}}{5}},$$

试确定 n。

35. 如果 $r=\frac{i^{(4)}}{d^{(4)}}$, 将 v 按 r 表示出来。

§1.9　利息效力

36. 推导公式 (1.37)。

37. 利用公式 (1.23) 给出 $\delta'=\delta$ 的第三种证明。

38. 设 $m>1$, 按大小增加的次序排列 $i, i^{(m)}, d, d^{(m)}$ 与 δ。

39. 证明 $\frac{d}{dt}\delta_t=\frac{A''(t)}{A(t)}-\delta_t^2$。

40. a) 如果 $A(t)=Ka^t b^{t^2} d^{c^t}$, 导出 δ_t 的表达式。

b) 在此情形公式 (1.24) 或 (1.25) 哪个更有利？

41. 试证明

a) $\int_0^n \delta_t dt=-\log_e v^n$。

b) $\int_0^n A(t)\delta_t dt=I_1+I_2+\cdots+I_n$。

42. 资金 A 以 10% 的单利率积累。资金 B 以 5% 的单贴现率积累，找出一个时刻，使其时两笔资金的利息效力相等。

43. 对一个积累函数为二次多项式的基金投资 1 年。在上半年得到的名义利率为半年度转换 5%, 整年的实质利率为 7%, 试确定 $\delta_{0.5}$。

44. 确定一个时期中某一部分的表达式，使在此部分中按单利计算超过按复利计算的积累值达到最大。

§1.10　变利息

45. 如果 $\delta_t=0.01t, 0\le t\le 2$, 试确定在区间 $0\le t\le 2$ 内的等价实质年利率。

46. 如果 $\delta_t=0.04(1+t)^{-2}$, 试确定 1 在第 19 年末的积累值。

47. 试确定 3 年期间的常数实质利率，使它等价于第 1 年 8%, 第 2 年 7%, 第 3 年 6% 的实质贴现率。

48. a) 确定 1 在 n 个时期末的积累值，其中第 k 个时期 $(1\le k\le n)$ 的实质利率由

$$i_k=(1+r)^k(1+i)-1$$

决定。

b) 证明 a) 的答案可写为 $(1+j)^n$, 并确定 j 。

49. 在时刻 t 的利息效力为 $t^3/100$, 确定 $a^{-1}(3)$ 。

50. 在资金 X 中，钱款以利息效力

$$\delta_t = 0.01t + 0.1 \quad \text{对} 0 \le t \le 20$$

来积累。在资金 Y 中，钱款以年实质利率 i 积累。两笔资金均投资 1, 为期 20 年。在第 20 年末两笔资金的数值相等。试计算资金 Y 在 1.5 年末的数值。

51. 假设 $\delta_t = \frac{2}{t-1}$, 当 $2 \le t \le 10$ 。对任何位于 n 和 $n+1$ 之间的 1 年期间 $(2 \le n \le 9)$, 计算等价的 $d^{(2)}$ 。

52. 假定第 k 年的实质贴现率为 $.01k + 0.06$ (对 $k = 1,2,3$), 试确定 3 年期间的等价单利利率。

杂题

53. a) 证明 $\delta \doteq \frac{i^{(m)}+d^{(m)}}{2}$, 此处 $\doteq$ 表示近似相等。

b) 设 $m=1$, 找出 (a) 式的误差用 δ 的级数来表示的精确表达式。

54. 证明 $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}i^m\left[\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{i^{(m)}}\right] = \delta$ 。

55. 确定下列导数

a) $\frac{d}{di}d$ c) $\frac{d}{dd}d^{(m)}$ e) $\frac{d}{d\delta}d$

b) $\frac{d}{di}\delta$ d) $\frac{d}{dv}\delta$

56. 用级数展开形式确定下列各项

a) i 作为 d 的函数 d) $i^{(m)}$ 作为 i 的函数

b) d 作为 i 的函数 e) δ 作为 d 的函数

c) v 作为 δ 的函数

57. 证明

$$\delta = \frac{d+i}{2} + \frac{d^2-i^2}{4} + \frac{d^3+i^3}{6} + \cdots$$

58. 证明

$$\frac{d^n}{dv^n}(v^{n-1}\delta) = -(1+i)(n-1)!$$

59. a) (1) 若 δ_r 为线性且正的，即 $\delta_r = a + br$, 其中 $a > 0$ 及 $b > 0$, 导出 $a(t)$ 的表达式。

(2) 确定从投资日起第 n 个时期的积累因子，即 $1+i_n$ 。

b) (1) 若 δ_r 为指数型且正的，即 $\delta_r = ab^r$, 其中 $a > 0$ 及 $b > 0$, 导出 $a(t)$ 的表达式。

(2) 确定从投资日起第 n 个时期的积累因子，即 $1 + i_n$ 。

60. 利息效力的 Stoodley 公式是

$$\delta_r = p + \frac{s}{1 + re^{st}},$$

试证 $a^{-1}(t) = \frac{1}{1+r}v_1^t + \frac{r}{1+r}v_2^t$, 其中 $v_1 = e^{-(p+s)}$, 而 $v_2 = e^{-p}$ 。

第二章　利息问题求解

§2.1　引　言

利息理论中的基本规则相对来说是比较少的。在第一章中，分析了利息的各种定量度量。第二章将讨论求解利息问题时应当遵循的一般规则。本章的目的是要发展一种系统的方法，利用这种方法可将第一章中的基本原理应用于更复杂的金融业务。

如对头两章有了透彻的了解，就可以解大多数利息问题。相继的各章有两个主要的目的：

1. 使读者熟悉更复杂类型的金融业务，包括一些在实践中碰到的术语的定义。

2. 提供对这些金融业务的系统分析，它使人们能够对问题作出比直接采用基本原理更有效的处理。

作为上述第二个目的的结果，有时我们会导出一些简化公式。幸运的是，需要记忆的公式数目较少，即使如此，常常有一些困难是来源于盲目地信赖公式而不理解这些公式所依据的基本原理。重要的是必须了解利息问题通常都能按基本原理去求解，而且在许多情形下采用基本原理并不象初看起来那样不便。

§2.2　求得数值结果

在第一章中许多包含积累值、现时值及等价利率与等价贴现率的例子和习题的答案都保留了指数形式。这样做的目的是简化那些基本规律的表示式，而不需读者去完成过多的算术运算。自然，在实际工作中，经常需要真实的数值答案，本节的目的就是要讨论得到这些解答的各种可能的方法。

个人计算机和带有指数函数、对数函数的便宜的袖珍计算器的出现，使人们可以通过直接计算得到各种利息问题的数值解。事实上，在许多情形下直接计算可能是最容易和最有效的方法。

另一种方法是利用复利表。这种表出现在附录 I 中，并包括 v^n 和 $(1+i)^n$ 的值，以及将在相继各章中定义的其他一些函数，表中取几种利率及从 1 到 50 的各种 n 值。在 v^k 和 $(1+i)^k$ 的表达式中，也有时给出 k 的非整数值，如 $k = 1/2, 1/4$ 及 $1/12$ 。如果需要的值出现在表中，则利用复利表是一种合适的方法。

最后，如果上述几种方法都不能用，则有时仍可用直接手算。这时可能需用级数展开。一个例子是用二项式定理来展开 $(1+i)^k$，即

$$(1+i)^k = 1 + ki + \frac{k(k-1)}{2!}i^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}i^3 + \cdots \quad (2.1)$$

第二个例子是将 $e^{k\delta}$ 展开为

$$e^{k\delta} = 1 + k\delta + \frac{(k\delta)^2}{2!} + \frac{(k\delta)^3}{3!} + \cdots \quad (2.2)$$

这些公式对于 k 取正值或负值都可以用，虽然，收敛可能较慢，除非 k 的绝对值为小量 (例如，对于分数时期的情形) 。由第一章的一些基本恒等式也可发展其他的级数展开式。然而，应该强调的一点是：为计算目的而使用级数展开是不方便的，且除非为特殊情况，一般并无必要。

在实践中经常用到的一种处理利息问题的方法，是对整数时期用复利，而对分数时期用单利。这一方法等价于假设 $0 < k < 1$ 时，在公式 (2.1) 的二项式展开中仅取头上二项。

可以证明，在最后一个分数时期使用单利相当于在 $(1+i)^n$ 与 $(1+i)^{n+1}$ 间完成线性插值，其中 n 是非负整数。为此可以从线性插值出发：

$$(1+i)^{n+k} \doteq (1-k)(1+i)^n + k(1+i)^{n+1} \quad (2.3)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+i)^n[(1-k)+k(1+i)] \\
&= (1+i)^n(1+ki), \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

它就是在最后一个分数时期应用单利的公式。单利的应用引入了一种偏差，因为如 1.5 节所指出的，单利在分数时期中产生比复利更大的积累值。

类似地可以指出，对 v^{n+k} 作线性插值相当于在最后一个分数时期使用单贴现。仍从线性插值出发

$$
\begin{aligned}
v^{n+k} &= (1-d)^{n+k} \doteq (1-k)(1-d)^n + k(1-d)^{n+1} \qquad (2.5) \\
&= (1-d)^n[(1-k)+k(1-d)] \\
&= v^n(1-kd), \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

它正是在最后一个分数时期所用的单贴现公式。

例 2.1　试给出例 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 与 1.12 的数值解答。

1. 例 1.7

由利息表或直接计算

$$500(1.02)^{20} = 500(1.48595) = \$742.97.$$

2. 例 1.8

由直接计算

$$1000(0.97)^{12} = 1000(0.69384) = \$693.84.$$

3. 例 1.9

由直接计算

$$i^{(4)} = 4[(0.995)^{-3} - 1] = 0.0606, \text{或} 6.06\%.$$

4. 例 1.10

由直接计算

$$1000e^{0.5} = \$1648.72.$$

如果必要，也可用级数展开

$$1000\left[1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^4}{4!} + \frac{(0.5)^5}{5!} + \frac{(0.5)^6}{6!} + \cdots\right] = \$1648.72.$$

在此例中，为了达到同样的精度必须一直用到 6 次幂的项，这就回答了为什么级数展开在求数值答案时只是作为最后的手段来使用。

5. 例 1.12

由利息表或直接计算

$$\begin{aligned} &1000(1.05)^5(1.045)^5(1.04)^5 \\ &= 1000(1.27628)(1.24618)(1.21665) \\ &= \$1935.05. \end{aligned}$$

例 2.2　试确定 \$5000 按 6% 年利每半年转换投资 30 年零 4 个月末的积累值：(1) 假定全部用复利，(2) 假定在最后的分数时期用单利。

1. 假定全部用复利，由直接计算得

$$5000(1.03)^{60\frac{2}{3}} = \$30,044.27.$$

2. 假定在最后一个分数时期用单利，则答案为

$$5000(1.03)^{60}(1.02) = \$30,047.18.$$

2 的答案大于 1, 显示单利在分数时期确比复利产生更大的积累值，虽然差别是很小的。

§2.3 时期的确定

在有些包含利息的实际问题中需要确定投资的时期。虽然这件事看来没有什么模糊不清的地方，但在实践中还是对如何计算投资时期的天数提出了不同的方法。常见的有三种方法。

第一种方法是用投资时期的精确天数，并用 365 天作为一年，在此基础上计算的单利有时称为"*严格单利*"，并常记为"实际 / 实际"。附录 II 包含了一个计数一年中天数的表，它便于计数在两个给定日期之间的天数。

第二种方法假定每个日历月有 30 天，每个日历年有 360 天。在此基础上计算的单利有时称为"*常规单利*"，常记为"30/360"。附录 II 不能用于此种情形的计算。然而，有一个计算两个给定日期间天数的公式

$$360(Y_2 - Y_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D1), \qquad (2.7)$$

其中

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{第一日期的月份} \\ D_1 &= \text{第一日期的日期} \\ Y_1 &= \text{第一日期的年份} \\ M_2 &= \text{第二日期的月份} \\ D_2 &= \text{第二日期的日期} \\ Y_2 &= \text{第二日期的年份} \end{aligned}$$

第三种方法是混合型的，它用投资时期的精确天数，但用 360 天作为一年。在此基础上计算的利息有时称为"*银行家规则*"，且常记为"实际 /360"。在习题中将会看到，与严格单利相比，贷款人总是更愿意用银行家规则。也可以看到，与常规单利相比，贷款人通常也更愿意用银行家规则，虽然，有时也有例外。

从理论上说，我们还可以有第四种方法，即“30/ 实际”或“30/365”, 但这种方法在实际中几乎从不使用。

在闰年会出现更复杂的情况，在大多数情况下，2 月 29 日作为一天来计数，且一年有 366 天。但在有些情形中，2 月 29 日作为一天来计数，而一年仍作为 365 天。还有一些场合，2 月 29 日不算作一天，即不计利息。作者甚至碰到过全年有 $365\frac{1}{4}$ 天的假设！对待闰年的统一算法至今尚未出现，在实践中还是遇到不同的计算方法。应当指出在使用常规单利 (30/360) 时，是否闰年是没有关系的。

上述的术语和讨论已经依单利来表达。然而，这三种常见的计算依据，即实际 / 实际，30/360 及实际 /360, 在计算复利时也是用到的。

除非另外说明，总是假设计算利息的天数不会把存入和取款的这两天都包括在内，而是只算其中的一天。如果按正规程序计算两个日期的差，则这就是结果。然而，偶而也会遇到这样的实际情形，其时存入日和取款日都计息，这样就造成有一天额外的利息。

并非所有包含利息的实际问题都需要计算天数。许多金融业务是按月度，季度，半年度或年度来处理的。在这些情况下，本节描述的计算方法就不需要了。

例 2.3　若在 6 月 17 日存入 \$2000, 到同年 9 月 10 日取款，利率 8%, 试确定下列情况下的利息金额。(1) 严格单利 (实际 / 实际), (2) 常规单利 (30/360), (3) 银行家规则 (实际 /360) 。

1. 由附录Ⅱ，9 月 10 日为第 253 天，而 6 月 17 日为第 168 天，故投资时期的实际天数为 $253-168=85$ 。这样，答案为

$$2000(0.08)\left[\frac{85}{365}\right]=\$37.26.$$

此处假设该年不是闰年。注意即使不提供附录Ⅱ的表，自己也容易算出天数为 85 。

2. 用公式 (2.7), 天数为

$$360(0)+30(9-6)+(10-17)=83.$$

故答案为

$$2000(0.08)\left[\frac{83}{360}\right]=\$36.89.$$

3. 天数上面已算过了，答案为

$$2000(0.08)\left[\frac{85}{360}\right]=\$37.78.$$

不必惊奇，按银行家规则的答案比严格单利和常规单利都大。

§2.4 基本问题

分解到其最简单的术语，一个利息问题包含四个基本的量：

1. 原始投资的本金
2. 投资时期的长度
3. 利率
4. 本金在投资期末的积累值

如果已知这四个量中的任何三个，则第四个就随之确定。在至今所考虑的包含积累值的问题中， 4 号量是未知量；而在包含现时值的问题中， 1 号量是未知量。 2.6 节考虑的是 2 号量为未知量的情形，而 2.7 节考虑的则是 3 号量为未知量的情形。

在解利息问题时，考虑到下述几点将是有帮助的：

1. 读者应该注意在进行金融计算时所提供的是什么样的工具。例如，下列考虑是同常用的工具有关的。

利息表

- 提供什么样的利率？

- 提供哪些函数？
- 计算多少时期？
- 小数位是否够多以保证足够的精度？

袖珍计算器

- 计算器是否有指数和对数函数？
- 是否可编制程序？
- 计算器内是否有金融计算的现成算法？

个人计算机 (PC 机)

- 是否已提供计算所需的软件？
- 是否计算量充分大以致有理由使用个人计算机？
- 快速输出结果的能力是否重要？

使用的方法取决于提供的工具，所包含计算的类型和复杂程度，以及计算工作量。对于本书来说，我们将假设可以得到一台有指数和对数函数的袖珍计算器，并利用附录 1 的利息表。这里我们不假设提供个人计算机；然而，许多应用问题可以很容易地用通常的软件来处理或很容易编制程序。

2. 投资时期的长度用时间单位来度量。在第一章中已指出，基本的度量时期常取为一年，许多问题可以此为时间单位，特别是那些包含实质利率和实质贴现率的问题。

然而，假如包含有名义利率或名义贴现率，使用不是一年的时间单位常是最有利的。最合适的时间单位常是利息转换时期。然而，在包含连续利息的问题中，需用其他的时间单位，例如一年。

3. 一个利息问题可以从两个不同的角度去看，因为它包含一个两方 (借方与贷方) 间的金融业务。如单从一个角度去看，问题当然总是一样的，然而，同一问题可能会因不同的观点而有不同

的措词。在例题和习题中会出现从两种观点出发的措词，希望读者不要为不同的词汇所混淆。

作为一个例子，回顾 1.7 节中所用的词“支付”与“记入贷方”。对某些读者来说，“支付”一词看来从借方观点看更为正规，而“记入贷方”则从贷方观点看更为正规。还有许多这样的例子。

复杂的金融业务常包含多于两方。例如，一个商业公司在分析它对一个新工厂作重点投资的利润率时就会涉及许多方面。在分析两方业务时所发展的原则可以很容易地推广到更复杂业务的分析。

4. 在有关利息的实际应用中术语可能造成混淆。许多术语含有双重的意义 (如 1.7 节中对“贴现”一词的讨论)。不仅如此，在以后各章中将会看到，某些被使用的术语不幸并不给出对所涉及业务的直观描述 (如 3.3 节中关于术语“延付年金”与“初付年金”的讨论)。最后，金融业务中的各方并不总是按照本节中所包含的那些精确的定义来使用术语。我们告诫读者在现实世界的应用中必须多看看所述术语字面以外的含意，而且要理解所讨论金融业务所涉及的多方面人士之间常存在术语上的不一致性。

§2.5 求值方程

在利息理论中有一个基本原则，即任何时刻货币金额的值依赖于经过的时间，因为钱是在过去付的；或者依赖于未来在它支付以前所将经历的时间。在本书头两章的一些例题和习题中已经看到这一点。

这一原则经常用对 *金钱的时间值* 的承认来标志。这种过程与那些不包含利息效应的金融计算相反，后者的计算不承认金钱的时间值。需要提醒读者“对金钱时间值的承认”反映了利息的效应，而不是通货膨胀的效应，后者是随时间增长而减少了金钱

的购买力。通货膨胀调整计算将在 9.4 节中讨论。

作为上述原则的推论，显然两个或更多个在不同时刻支付的金额是不能相互比较的，只有当他们积累或贴现到同一日期才能比较。这个同一日期称为*比较日期*，而将每一付款积累或贴现到比较日期的方程称为*求值方程*。

对于解求值方程常有帮助的一种工具是*时间图*。所谓时间图是一种一维的图形，其中时间单位是沿着一维度量的，而付款则放置在图上的适当点。注意沿一个方向的付款位于图的顶部，而沿另一方向的付款则在图的底部。比较日期用一箭头来标记。图 2.1 是用来解例 2.4 的时间图的一个例子。

时间图在解求值方程时并不是必需的，它只是对使问题形象化提供一点帮助。在经历某些实践后，读者就能对较简单的问题省去用时间图。然而时间图对解复杂一些的问题常常是有用的。复利的性质之一是比较日期的选择对得到的解来说没有差别。这样，对每个比较日期有不同的求值方程，但它们都引出同样的解答。复利的'这一重要性质将在例 2.4 的解答中展示。

提醒读者注意，对其他的利息类型，例如单利或单贴现，比较日期的选择确实会影响得到的解。这再一次展示了采用单利或单贴现时的固有的不一致性。

读者应注意，在头两章中已考虑过的含有积累值和现时值的问题是求值方程的例子。例 2.4 展示了一个更一般类型的问题。

例 2.4　某人愿意立即付 \$100, 第 5 年末付 \$200, 并在第 10 年末再付款，以在第 8 年末得到 \$600, 如果名义利率为 8%, 按每半年转换，试确定他在第 10 年末应付多少。

我们首先把比较日期取成现在来讨论此问题。时间图见图 2.1 。

因为利息是每半年转换的，我们将按半年来计算时间周期。求值方程为

$$100+200v^{10}+Xv^{20}=600v^{16}\quad 在4\%$$

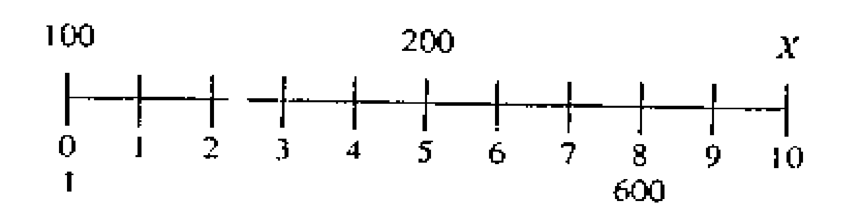


图 2.1　例 2.4 的时间图

$$\begin{aligned}
X &= \frac{600v^{16} - 100 - 200v^{10}}{v^{20}} \\
&= \frac{600(0.53391) - 100 - 200(0.67556)}{0.45639} \\
&= \$186.76.
\end{aligned}$$

我们也可以选择不同的比较日期，并得到不同的求值方程。例如，假定比较日期取为第 10 年末，则时间图上的箭头将在 10 的下面，而求值方程为

$$100(1.04)^{20} + 200(1.04)^{10} + X = 600(1.04)^4$$

$$\begin{aligned}
X &= 600(1.04)^4 - 100(1.04)^{20} - 200(1.04)^{10} \\
&= 600(1.16986) - 100(2.19112) - 200(1.48024) \\
&= \$186.76.
\end{aligned}$$

这样，得到的结果相同。两个求值方程是等价的。假如将第一个方程的两端各乘上 $(1.04)^{20}$，就得到第二个方程。读者可以自行校核，如果选择其他的比较日期，所得结果也是相同的。

§2.6　未知时间问题

2.4 节中曾说过，进入利息问题的四个基本量中任意三个如已给出，则第四个就可决定。在本节中将考虑投资时期长度为未知的情形。

求解包含单次付款的未知时间最好的方法是使用对数。这种做法将在例 2.5 中展示。如上面 2.4 节中所说，我们假设可提供具有指数和对数函数的袖珍计算器。

如果不能提供这样的计算器，则可以用另一种精确度稍差的方法，即在利息表中的线性插值。这种方法也参见例 2.5 。

有时会出现一种情况，在不同时刻的几次付款要被数值上等于这些付款之和的一次付款所代替。问题是要找到付这一次款的那一时刻，使它在价值上等于分别给出的几次付款。

设在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别付出金额 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，问题是要找到时刻 t，使在该时付出 $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ 等价于分别付出 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 。

求值的基本方程是

$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)v^t = s_1v^{t_1} + s_2v^{t_2} + \cdots + s_nv^{t_n}. \qquad (2.8)$$

它是一个未知量 t 的一个方程。作为习题，请读者找出 t 的精确表达式。

作为一次近似，t 经常用各个付款时间的加权平均来计算，其中权取为各次付款的金额，即

$$\bar{t} = \frac{s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots + s_nt_n}{s_1 + s_2 + \cdots + s_n} = \frac{\sum_{k=1}^n s_kt_k}{\sum_{k=1}^n s_k}. \qquad (2.9)$$

这一近似式用 $\bar{t}$ 来记，并常称为用等时间方法。

可以证明 $\bar{t}$ 的值总是大于 t 的真值，换言之，用等时间方法的现时值小于真实的现时值。

考察 s_1 个量每个等于 v^{t_1}，s_2 个量每个等于 v^{t_2}，如此等等直

至 s_n 个量每个等于 v^{t_n} 。这些量的算术平均是

$$\frac{s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}}{s_1+s_2+\cdots+s_n}.$$

这些量的几何平均是

$$v^{\frac{s_1t_1+s_2t_2+\cdots+s_nt_n}{s_1+s_2+\cdots+s_n}}=v^{\bar{t}}.$$

然而，我们知道 n 个不全相等的正数的算术平均大于其几何平均，故有

$$\frac{s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}}{s_1+s_2+\cdots+s_n}>v^{\bar{t}}$$

或

$$s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}>(s_1+s_2+\cdots+s_n)v^{\bar{t}}.$$

左边是真实的现时值，它超过了右边由等时间方法给出的现时值。因此，由公式 (2.9) 得出的 $\bar{t}$ 值总是大于由公式 (2.8) 给出的 t 值。

在分析金融业务的平均 (时间) 长度时，等时间方法是有用的。在 9.8 节中将进一步讨论其应用。

经常要问的另一个有趣问题是：在给定利率下要多长时间存款才能加倍？可分析此问题如下：

$$(1+i)^n=2$$

或

$$n\log_e(1+i)=\log_e 2,$$

给出

$$n=\frac{\log_e 2}{\log_e(1+i)}. \tag{2.10}$$

对公式 (2.10) 给出的精确结果可导出如下近似式：

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{\log_e 2}{\log_e(1+i)} \\
&= \frac{0.6931}{i} \cdot \frac{i}{\log_e(1+i)}.
\end{aligned}
$$

当 $i = 8\%$ 时算得的第二因子为 1.0395 。如此有

$$
\begin{aligned}
n &\doteq \frac{0.6931}{i}(1.0395) \\
&= \frac{0.72}{i} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

这公式常被叫作 72 规则，因为它立即可应用，只要将 72 除以作为百分比 (即作为 $100i$) 表示的利率。

72 规则在很广的利率范围内产生惊人准确的结果。表 2.1 中提供了相应的值。

表 2.1　使存款加倍的时间长度

利率	72 规则	准确值
4%	18	17.67
6	12	11.90
8	9	9.01
10	7.2	7.27
12	6	6.12
18	4	4.19

例 2.5　将 \$1000 按年利率 6% 半年期复利去投资，问积累到 \$1500 所需的时间长度是多少？ (1) 用对数， (2) 用在利息表中插值。

设 n 为半年的个数，求值方程为

$$
\begin{aligned}
1000(1.03)^n &= 1500 \\
(1.03)^n &= 1.5.
\end{aligned}
$$

1. 利用对数

$$
\begin{aligned}
n\log_e 1.03 &= \log_e 1.5 \\
n = \frac{\log_e 1.5}{\log_e 1.03} &= \frac{0.405465}{0.029559} = 13.717.
\end{aligned}
$$

这样，年数为 6.859 。

2. 由利息表 $(1.03)^{13} = 1.46853$ 及 $(1.03)^{14} = 1.51259$, 故 $13 < n < 14$, 由线性插值

$$
n = 13 + \frac{1.50000 - 1.46853}{1.51259 - 1.46853} = 13.714.
$$

因此，年数为 6.857 。这一方法等价于假设在利息转换时期的最后一个分数时期内用单利。这一点在 2.2 节中讨论得更详细。

例 2.6　预定在第 2, 3, 8 年末分别付款 \$100, \$200 和 \$500 。假设实质利率为年率 5%, 试确定一个一次付款 \$800 的时刻，使它 (1) 按等时间方法，(2) 按精确方法为等价。

1. 按等时间方法用公式 (2.9)

$$
\bar{t} = \frac{100\cdot 2 + 200\cdot 3 + 500\cdot 8}{100 + 200 + 500} = 6\text{年。}
$$

2. 精确求值方程为

$$
800v^t = 100v^2 + 200v^3 + 500v^8
$$

或

$$
v^t = \frac{100(0.90703) + 200(0.86384) + 500(0.67684)}{800} = .75236.
$$

可解出 t

$$
t = -\frac{\log_e 0.75236}{\log_e 1.05} = -\frac{-0.28454}{0.04879} = 5.832\text{年。}
$$

正如预料的那样，t 的精确值小于用等时间方法算得的值。

§2.7 未知利率问题

2.6 节考虑了投资时期长度为未知的情形。本节我们将考虑利率为未知的情形。在实践中经常会碰到要决定未知利率的问题，因为在特殊业务中常需要计算利润率。在后面的几章中还会再次考虑对各种重要应用问题如何求解未知利率的方法。

我们考察四种确定未知利率的方法。第一种是直接用具有指数函数和对数函数的计算器去解关于 i 的求值方程。此方法很适宜于只有单次付款的场合，偶而也适用于其他的情形。

第二种方法是用代数方法解关于 i 的求值方程。例如，一个所有项都有整数指数的求值方程可以看作为对 i 的 n 次多项式求根。如果此多项式的根可用代数方法求出，则 i 立即就决定了。此种方法常仅用于 n 值较小的情形。

第三种方法是在利息表中用线性插值。这种方法曾在 2.6 节中用来决定未知时间，它也适用于解未知利率。

第四种方法是*逐次近似*或*迭代*。在用迭代法来解未知利率时，先用求值方程来决定一个包含 i 的函数，记为 $f(i)$，然后用迭代法去找 i 的值使 $f(i)=0$。如果初始值取得很靠近于真实的根，则逐次近似的次数可大大减少。好的初始值经常可由利息表的线性插值，也就是由上述第三种方法得到。例 2.10 将展示一种 ad hoc 迭代技术。

例 2.7　$1000 要在 6 年内积累到 $1600，季度转换利率应取多少？

设 $j=i^{(4)}/4$，则求值方程成为

$$1000(1+j)^{24}=1600$$

或

$$j=(1.6)^{1/24}-1.$$

此方程可直接求解，得

$$j = 0.019776.$$

答案为

$$i^{(4)} = 4j = 0.0791，或7.91\%.$$

例 2.8　第二年末支付 \$2000 及第四年末支付 \$3000 的现时值为 \$4000, 问实质利率为多少？

求值方程为

$$4000 = 2000v^2 + 3000v^4,$$

它可重写为

$$3v^4 + 2v^2 - 4 = 0.$$

此方程可按 v^2 解出为

$$v^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}.$$

因 $v^2 > 0$, 只有正根是有意义的。有

$$v^2 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = 0.868517$$

或

$$(1+i)^2 = 1.151388.$$

它给出

$$i = 0.0730 或 7.30\%.$$

例 2.9　如果现在投资 \$1000, 3 年后再投资 \$2000, 问半年度转换利率应取多少才能在 10 年后积累到 \$5000?

令 $j = i^{(2)}/2$, 则求值方程成为

$$1000(1+j)^{20} + 2000(1+j)^{14} = 5000.$$

这一问题不象先前两个例子那样可以解析地解出，所以我们将在利息表中用线性插值。定义

$$f(j) = 1000(1+j)^{20} + 2000(1+j)^{14} - 5000.$$

我们要寻找使 $f(j) = 0$ 的 j 。由试凑法

$$\begin{aligned} f(0.0300) &= 1000(1.80611) + 2000(1.51259) - 5000 \\ &= -168.71, \\ f(0.0350) &= 1000(1.98979) + 2000(1.61869) - 5000 \\ &= 227.17. \end{aligned}$$

再用线性插值

$$j = 0.0300 + 0.0050\frac{0 + 168.71}{227.17 + 168.71} = 0.0321.$$

由此

$$i^{(2)} = 2(0.0321) = 0.0642 \text{ 或} 6.42\%.$$

例 2.10　用迭代法使例 2.9 的解达到更高的精度。

我们将使用有指数和对数函数的计算器及 ad hoc 迭代方法。由例 2.9 有

$$f(j) = 1000(1+j)^{20} + 2000(1+j)^{14} - 5000$$

及一次近似 $j = 0.0321$ 。注意 $f(j)$ 当 $j > 0$ 时为 j 的增函数。我们有

$$\begin{aligned} f(0.0321) &= -6.114, \\ f(0.0322) &= 1.759. \end{aligned}$$

这里用了一个比 .0321 为高的值以得到 $f(j)$ 的变号。

再作一次线性插值

$$j = 0.0321 + 0.0001\frac{0 + 6.114}{1.759 + 6.114} = 0.03218.$$

继续循环以将小数再增加一位

$$\begin{aligned} f(0.03218) &= 0.18346, \\ f(0.03217) &= -0.60420. \end{aligned}$$

这时我们用低于 .03218 的值以得到 $f(j)$ 的变号。

再作一次线性插值

$$j = 0.03217 + 0.00001\frac{0 + 0.60420}{0.18346 + 0.60420} = 0.032178.$$

再循环一次以将小数再推进一位

$$\begin{aligned} f(0.032178) &= 0.025919, \\ f(0.032177) &= -0.052851. \end{aligned}$$

这样， $j = 0.32178$, 它精确到六位小数，因为

$$|f(0.032178)| < |f(0.032177)|.$$

故更精确的答案为

$$i^{(2)} = 2(0.032178) = 0.06436 \text{ 或} 6.436\%.$$

如果需要，上述程序可再重复许多次。每一次循环可使精度增加一位小数。

虽然确实存在着收敛更快的方法，上述方法仍是简单而直接的，而且收敛速度也比大多数 ad hoc 方法为快。不仅如此，还能发展一种对一大类包含决定未知利率的利息问题有用的类似方法。

§2.8 实 例

实际上每一个人都在其金融业务中面临利息计算。然而，在实践中利息计算并不总是按本书中指出的正确程序来进行的。本节的目的是使读者熟悉某些在实践中会遇到的变化。本节中的例子远不是全面的，但它们是现实世界中利息应用的例证。在本节中用到的有些投资类型的术语是读者所不熟悉的。例如“存款单”和“货币市场基金”。这些术语的定义在 8.8 节中给出。

在报上常常会见到的一类广告提供两种不同的储蓄的“率”。在我写这段话的时候，作者正好在看两则这样的广告。在第一则广告中，一家银行提供一种一年期的存款单，它有“7.91% 利率 /8.15% 收益率”。第二则广告中，某存放款业务提供一种基金，它有“8.00% 利率 /8.30% 年度收益率”。这两个数字的意义是什么？在上述例子中，前面一个数是名义利率而后面一个数是年度实质利率。读者可以校核一下，$i^{(4)}=0.0791$ 是等价于 $i=0.0815$，而 $i^{(12)}=0.0800$ 则等价于 $i=0.0830$。在前一个例子中，广告已载明计复利的频率，而后一则广告则未载明，按月计复利的频率是试凑出来的。

2.3 节曾讨论过计算天数的各种算法。作者看到过的一则广告说，一家储蓄银行提供日计复利 6% 的贷款，它产生 6.27% 的收益率。每年用 360 天或 365 天去计算，答案均为 6.18%，那末 6.27% 这个答案是从何而来的呢？经过试凑才发现，这家银行是使用如下的 360 天和 365 天的混合：

$$\left[1+\frac{0.06}{360}\right]^{365}-1=0.0627.$$

当利息不是日计复利时，出现了一些有趣的做法。考察一个投资帐户，它按月计利息且存在存入和撤出资金的可能。一种通常的做法是，按平均每日余额来计利息；另一种通常的做法按最小每日余额来计利息，第三种做法是按开始时的余额来计利息，

逢撤回则减少，逢存入不增加。在后一种情形存入的钱要到下月开始才计息。

甚至计复利的频率也是错综复杂的。通常计复利发生在某些正规的、预先决定的时期。然而，作者也碰到过一种货币市场基金，它是每当利率改变时计复利。这样，当一个月内利率不变时只计一次复利，而在另一个多变的月份则可能计六次甚至更多次复利。

区分利率和贴现率也是重要的。例如，美国国库发行期限为13, 26 及 52 周的短期国库券。这类“T 一券”是按贴现率来计算的。另一方面，长期国库证券则是按利率计算的。这样，短期国库券与长期国库证券不能直接比较利率，除非换算成等价的利率。在 7.2 节中还将进一步讨论短期国库券。

在短期的商业业务中经常碰到贴现率。例如，假如按 12% 的贴现率借 $10,000, 为期一个月，则借款人立即收到 $9900 而在一个月之末需还 $10,000 。如上例所示，这类短期业务常按单贴现来计算。其净效应是相当于用一个贴现率，它是按与贷款期限相同的频率来转换的。这样，如果对于可变长度的贷款用一种被宣称的贴现率，就象上面的 12%, 则等价的实质贴现率将随贷款长度而不同。

信用卡收取利息的方式很有趣，利息通常按上一个月的最终余额来计算。这样，当月的新赊购不收利息，即直到下个月才开始收利息。自然，这是一个从赊购之日起直到月底免收利息的贷款。那些每个月付足信用卡费用的人自然是短期借款而不付任何利息。另一方面，那些确有跨月未结余额的帐户，其利率是很高的。

投资者还必须仔细考虑的另一件事是提早撤回投资的惩罚。例如，许多存款单都有这种惩罚。假如有一个两年期的存款单，其年利率为 9%, 购买者大概会对一年后退储有一个粗略的认识，并知道将付少于 9% 的利息。提前支取的惩罚常包括降低利率，或

对某一段时间不付利息或两者的某种组合。也会遇到其他形式的提前支取的惩罚。

上面这些例子会使读者对会遇到的某些类型的应用问题有所了解。存在着这样许多千变万化的情况和各种情况下术语的不统一，使本来简单的金融分析变得困难。在现实世界的应用中，提醒读者不光要看事情的表面，还要严格地弄清楚包含利息的计算究竟是怎样进行的。否则，对借款与贷款的各种选择将难于作出比较。

习　题

§2.2　求得数值结果

1. 按 12.6% (利率) 将 $10000 投资 4 个月，其中利息是用二次函数去逼近精确计算，试确定积累值。

2. 确定在 25 个月之末支付 $5000 的现时值，其中贴现率是季度转换 8% 。

a) 设全部取复贴现

b) 设在最后一个分数时期用单贴现

3. 试确定一个分数时期的表达式，使在其中用单贴现计算的现时值超过按复贴现计算之值达到最大。

4. 方法 A 假定在最后一个分数时期内用单利，而方法 B 假定在最后一个分数时期用单贴现。年度实质利率为 20% 。试确定按方法 A 计算的在 1.5 年后付款的现时值与按方法 B 计算之值的比值。

§2.3　时期的确定

5. 如一项投资从美国参加第二次世界大战之日，即 1941 年 12 月 7 日开始，到战争结束之日，即 1945 年 8 月 8 日终止，问一共投资了多少天？

a) 按实际 / 实际计算

b) 按 30/360 计算

6. 按 6% 单利在 7, 8 两个月投资 \$10000, 试确定得到的利息金额。

a) 假设为严格单利

b) 假设为常规单利

c) 假设取银行家规则

7. a) 若与严格单利比较，试证明贷款人总是更喜欢银行家规则。

b) 若与常规单利比较，试证明贷款人大多更喜欢银行家规则。

c) 试找出 b) 的一个反例，使相反关系成立。

§2.5 求值方程

8. 为了在第 4 年末得到 \$2000 及在第 10 年末得到 \$5000、投资者愿意立即投资 \$3000, 并在第 3 年末追加一笔投资。如果 $i^{(4)} = 0.06$, 试确定追加投资的数额。

9. 按某一利率以下两种付款形式的现时值相等:

(1) 第 5 年末付 \$200, 再加第 10 年末付 \$500,

(2) 第 5 年末付 \$400.94 。

现若以同样利率投资 \$100 并加上在第 5 年末投资 \$120, 将在第 10 年末积累到 P 。试计算 P 。

10. 一投资者在第 1, 3, 5 年末向一基金各存一笔钱，在时刻 t 的存款为 $100(1.025)^t$ 。如果季度转换名义贴现率为 4/41, 试确定此基金在第 7 年末的规模。

11. 比较日期的选择对由复利得到的解答并无影响，而对单利则并非如此。试确定第 10 年末的付款金额，它要等价于两笔各 \$100 的付款，其中第一笔立即给付，第二笔在第 5 年末给付。假设每一笔从付款日起享受 5% 单利，而比较日期分别用

a) 第 10 年末,

b) 第 15 年末。

§2.6　未知时间问题

12. 严格地解公式 (2.8) 。

13. 有两笔各 \$1000 的资金同时开始储蓄，前者实质利率为 6%, 后者实质利率为 4%, 问经过多长时间后，前者的积累值为后者的 2 倍？

14. 分别在第 n 年末和第 $2n$ 年末各要付款 \$100 的现时值为 \$100 。若 $i = .08$, 求 n 。

15. 在第 n 年末付款 n, 第 $2n$ 年末付款 $2n$, $\cdots$, 第 n^2 年末付款 n^2, 试按等时间方法确定 $\bar{t}$ 的值。

16. 要你建立一个 n 的规则，以近似确定需花多长时间使钱款增长到原来的三倍。试确定 n 。

17. 与人谈判一笔贷款，贷款人同意接受 10 年后归还 \$1000, 20 年后归还 \$2000, 30 年后归还 \$3000, 全部还清。现在借款人希望以一次付清 \$6000 来偿还这笔贷款。设 T_1 表示由求值方程算得的付 \$6000 的时间， T_2 表示由等时间方法所定出的时间。如果 $i = 0.01$, 试确定 $T_1 - T_2$ 到最靠近的 .10 。可利用表中的线性插值。

18. 基金 A 以月度转换 12% 的利率积累。基金 B 以利息效力 $\delta_t = t/6$ 积累。在时刻 $t = 0$, 两笔基金存入的款项相同，试确定两基金金额相等的下一时刻。

§2.7　未知利率问题

19. 投资 \$1000 在第 15 年末的积累值为 \$3000, 试确定半年度转换的名义利率。

20. 如果现在投资 \$300, 第一年末投资 \$200, 第二年末投资 \$100, 这样在第二年末积累到 \$700, 求精确实质利率的表达式。

21. 已知一笔 \$1000 的投资到第 10 年末积累到 \$1825 。如果假定第一年间取利率为 i 的单利，第 2 年利率为 $2i$, $\cdots$ 第 10 年利率为 $10i$ 。求 i 。

22. 已知一笔投资按可变利息效力 $\delta_t = kt$ 在 10 年内可以翻

一番。试找出 k 的表达式。

23. 1 按某实质利率 i 在第 3 年末的积累值，与在第 3 年末按数值上等于 i 的实质贴现率付 1 的现时值之和为 2.0096 。试确定 i 。

24. 利用下列公式以形成递推值

$$j_{s+1} = j_s - \frac{f(j_s)}{f'(j_s)}$$

来重新考察例 2.9 和例 2.10, 试证例 2.10 中得到的答案是可作为仅迭代 1 次的 j_1 而得到，其中用例 2.9 中得到的答案作为初始值 j_0 。

§2.8　实例

25. 一张 \$100 的期票在到期前 3 个月被人以 \$96 买走，试确定：

a) 购买者所得到的按季度转换名义贴现率，

b) 购买者所得到的年度实质利率。

26. 一种 2 年期存款单按年度实质利率 9% 计息。购买者面临两种对提前支取的惩罚可供选择：

A —— 利率减低为 7%,

B —— 损失 3 个月的利息。

为了帮助购买者决定应选哪一种，试计算按选择 A 的收入与按选择 B 的收入之比，其中存款单的退储日期有以下两种：

a) 在第 6 个月之末，

b) 在第 18 个月之末。

27. 一家存放款公司在每年年底对储蓄付 7% 实质利率的利息，每 3 年之末还付给当时余额 2% 的红利。试确定投资者得到的实质利率，其中投资期限为

a) 2 年，

b) 3 年，

c) 4 年。

28. 一家银行提供下列条件的存款单：

储蓄年限	名义年利率 (半年度转换)
1	5%
2	6%
3	7%
4	8%

此银行不允许提前支取。单据在年限之末到期，在今后 6 年中此银行将继续提供此类存款单。一位投资人在银行中存了 \$1000 。请计算在第 6 年末能收回的最大金额。

杂题

29. 一家制造商出售其产品给零售商，后者可以有两种选择：(1) 立即按低于零售价 30% 的价格付款。(2) 6 个月后按低于零售价 25% 的价格付款。

试确定一年度实质利率，使得在此利率下零售商在两种选择间会觉得无所谓。

30. 如果一笔投资按利息效力 δ 在 8 年内将会加倍，若按数值上等于 δ 的名义利率且每 3 年转换一次，在多少年内一笔投资会达到 3 倍？

31. 基金 A 按实质利率 6% 积累，基金 B 按实质利率 8% 积累。在 20 年末两笔基金之总和为 \$2000 。在 10 年之末基金 A 的金额为基金 B 的一半。问在 5 年之末两基金总和为多少？

32. 一位投资人在一家银行存款 \$10000 。在第 1 年中，银行提供实质年利率 i，到第 2 年中则为实质年利率 $i-0.05$ 。到第 2 年末余额为 \$12093.75 。如果 3 年中每年的实质年利率是 $i+0.09$ 的话，那末此帐户在 3 年之末的余额应为多少？

33. 某 A 签了一张 1 年期的 \$1000 的借据并从银行收到 \$920 。在第 6 个月之末，A 付款 \$288 。假设为单贴现，A 的付款会使借据的票面值减少多少？

第三章　基本年金

§3.1　引　言

年金 可以定义为按相等的时间区间支付的一系列付款。年金在经济生活中是常见的。房屋的租金，抵押付款，汽车的分期付款，以及投资款项的利息付款等都是年金的例子。“年金”一词的原始意义是限于每年一次的付款，但现已被推广到按任何正规的时间间隔付款。

考虑一种在固定的时期支付确定金额款项的年金。具有这种性质的年金称为 *确定年金* 。付款的固定时期称为此年金的 *期* 。例如一个家庭或一项事业的抵押付款就是一种确定年金。

并非所有的年金都是确定年金。付款并不确定的年金称为 *风险年金* 。一种很通常的风险年金是只有当一个人活着时才支付的那种年金。这种年金称为 *生命年金* 。例如，由一个养老金计划按月支付的退休金，它在退休人员活着时才支付，就是一种生命年金。

在本书中我们将主要考虑确定年金。但在 9.5 节中也提出不履行或不付款的风险。为方便起见，常常舍去“确定”两字，而将确定年金称为“年金”。

两次年金付款之间的间隔称为 *支付期* 。在本章中，我们所考虑的年金，其支付期和利息转换时期是相等且一致的，付款金额也是相等的。既然支付期相等且利息转换时期为相等且一致，我们将对两者用同一词“时期”。在第四章中将会遇到支付期和利息转换时期不一致以及付款金额可变的情形。

§3.2 延付年金

考虑一种年金，它在 n 个时期中，每个时期末付款 1 。这种年金称为**延付年金**。图 3.1 是这种年金的时间图。箭头 1 在第 1 次付款前 1 个时期出现。假设每个时期的利率为 i 。年金在这一时刻的现时值记为 $a_{\overline{n}|}$ 。箭头 2 在箭头 1 以后 n 个时期出现，恰恰在最后一次付款以后。年金在这一时刻的积累值记为 $s_{\overline{n}|}$ 。

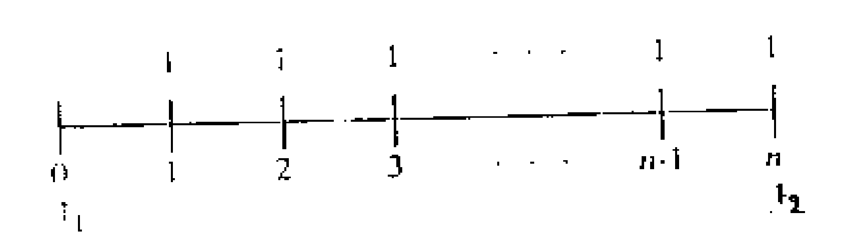


图 3.1 一种延付年金的时间图

我们可以按第 1 个时期开始时的求值方程来导出 $a_{\overline{n}|}$ 的表达式。在第 1 个时期末付款 1 的现时值为 v, 在第二个时期末付款 1 的现时值为 v^2, 这样继续下去，直到第 n 个时期末付款 1 的现时值为 v^n 。总的现时值 $a_{\overline{n}|}$ 必为每次付款现时值之和，即

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n. \tag{3.1}$$

这一公式可以用来计算 $a_{\overline{n}|}$, 但当 n 较大时这样算是不方便的。注意到 (3.1) 是一个几何级数，就可以导出一个更紧凑的表达式

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \\ &= v\frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= v\frac{1 - v^n}{iv} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-v^n}{i}. \tag{3.2}$$

$s_{\overline{n}|}$ 的表达式可以用类似方法按第 n 个时期末的求值方程导出。在第 1 个时期末付款 1 的积累值是 $(1+i)^{n-1}$, 在第 2 个时期末付款 1 的积累值为 $(1+i)^{n-2}$, 这样继续下去，直到第 n 个时期末付款 1 的积累值恰为 1 。总的积累值 $s_{\overline{n}|}$ 必等于每一付款积累值的总和，即

$$s_{\overline{n}|} = 1+(1+i)+\cdots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}. \tag{3.3}$$

同样，可以利用几何级数求和导出更紧凑的表达式

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= 1+(1+i)+\cdots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1} \\ &= \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} \\ &= \frac{(1+i)^n-1}{i}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

在附录 1 的利息表中给出了对几种利率和 n 由 1 到 50 的 $a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 的值。有时把利率写在符号的右下角，例如 $a_{\overline{10}|0.07}$ 及 $s_{\overline{25}|0.08}$ 。因为这会把符号搞得复杂，所以我们只在对形成函数时所用利率可能会模糊时才这样记。

可以对改写为

$$1 = ia_{\overline{n}|} + v^n$$

的公式 (3.2) 给出一个字面上的解释。

考虑初始投资 1, 历时 n 个时期。每个时期，此投资 1 将产生在期末支付的利息 i 。这些利息付款的现时值为 $ia_{\overline{n}|}$ 。在第 n 个时期之末，原始投资的本金 1 仍收回，它的现时值为 v^n 。这样，方程两边都表示投资 1 在投资之日的现时值。对公式 (3.4) 的类似的字面解释留作习题。

在 $a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 间存在下列简单的关系

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n. \tag{3.5}$$

这一公式是很明显的，只要比较 (3.1) 与 (3.3) 式或 (3.2) 与 (3.4) 。由时间图也可明显看出这一点。因为 $s_{\overline{n}|}$ 可认为是 $a_{\overline{n}|}$ 的同一笔付款，只不过其取值是在 n 个时期以后。

$a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 间的另一个关系是

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i. \tag{3.6}$$

这一公式可以这样导出：

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i &= \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i \\ &= \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} \\ &= \frac{i}{1 - v^n} \\ &= \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.\end{aligned}$$

$\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 的值出现在附录 I 中的利息表上。在第六章中会看到，公式 (3.6) 从另一角度看十分重要。那时会给出此公式的字面解释。

例 3.1　一项年金在 20 年内每半年末付 \$500, 设利率为每半年转换 9%, 求此项年金的现时值。

答案为

$$500a_{\overline{40}|0.045} = 500(18.4016) = \$9200.80.$$

例 3.2　若某人以季度转换年利率 8% 投资 \$1000, 问他每季度之末能取回多少使这笔钱在第 10 年末正好用完？

设 R 为每次取回的金额，投资之日的求值方程为

$$Ra_{\overline{40}|0.02} = 1000.$$

这样，我们有

$$\begin{aligned} R &= \frac{1000}{a_{\overline{40}|0.02}} \\ &= \frac{1000}{27.3555} \\ &= \$36.56. \end{aligned}$$

例 3.3　有一笔 \$1000 的贷款，为期 10 年。若实质利率为年率 9%, 试对下面三种还款方式比较其利息总量：

(1) 整个贷款加上积累的利息在第 10 年末一次还清，

(2) 每年产生利息即付，而本金则在第 10 年末归还，

(3) 贷款在 10 年期内按每年付款数相同的原则还清。

答案 1. 贷款在第 10 年末的积累值为

$$1000(1.09)^{10} = \$2367.36.$$

这样，所付利息总量为

$$2367.36 - 1000.00 = \$1367.36.$$

答案 2. 每年得到的贷款利息为 $1000(0.09) = \$90$, 所以支付的利息总量为

$$10 \cdot 90 = \$900.00.$$

答案 3. 设相等的付款为 R, 贷款开始时对 R 的求值方程为

$$Ra_{\overline{10}|} = 1000,$$

由此给出

$$R = \frac{1000}{a_{\overline{10}|}} = \frac{1000}{6.417658} = \$155.82.$$

这样，所付利息总量为

$$10(155.82) - 1000 = \$558.20.$$

读者应按通常的推理方法来比较三种付款方式下的相对答案。在贷款中付款付得越迟，则利息总量将越高。反过来，付款越早，则利息金额将越小。虽然，按三种方法的付款总数是不相等的，但其付款的现时值则都等于 \$1000，即三种情况下的贷款金额。

§3.3 初付年金

在 3.2 节中延付年金是定义为在期末付款的年金。在本节中将考虑另一种年金，它在期初付款，称为 *初付年金* 。用术语“延付年金”与“初付年金”其实并不好，因为这些术语并不能描述这些年金的性质。

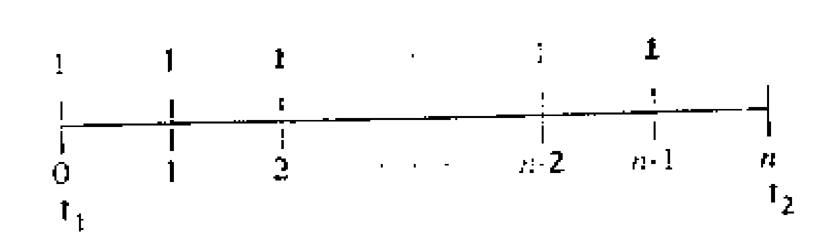


图 3.2 初付年金的时间图

图 3.2 是一个有 n 个时期的初付年金的时间图。箭头 1 在第一次付款时刻出现。年金在这一时刻的现时值记为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 。箭头 2 在箭头 1 以后 n 个时期出现，即在最后一次付款以后一个时期。年金在此时刻的积累值记为 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 。

我们可以类似于公式 (3.1) 那样写出 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 的表示式

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}. \tag{3.7}$$

再次用几何级数求和

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{1-v}\\ &= \frac{1-v^n}{iv}\\ &= \frac{1-v^n}{d},\end{aligned} \tag{3.8}$$

它类似于公式 (3.2) 。

同样地对于 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$, 我们有类似于 (3.3) 和 (3.4) 的下述公式

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{n-1}+(1+i)^n \quad (3.9)\\ &= (1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\\ &= \frac{(1+i)^n-1}{iv}\\ &= \frac{(1+i)^n-1}{d}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

将 (3.2) 式与 (3.8) 式进行比较是很有启发性的。分子是相同的，但 (3.2) 式的分母为 i, 而 (3.8) 式的分母为 d 。对延付年金，它是在期末付款，而 i 正好是期末支付利息的度量。而对初付年金，它是在期初付款， d 正好是期初支付利息的度量。比较 (3.4) 与 (3.10) 给出类似的结果。

将年金支付时间与分母上的利息联系起来的上述性质，有助于记忆年金公式。不仅如此，此性质还可推广到更复杂的年金，这将在第四章中讨论。

显然有

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n, \tag{3.11}$$

这是一个类似于 (3.5) 的公式。也可证明

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d, \tag{3.12}$$

这是一个类似于 (3.6) 的公式。(3.12) 的推导留作习题。

延付年金和初付年金是相互联系的。有一种关系是

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i) \tag{3.13}$$

及

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i). \tag{3.14}$$

公式 (3.13) 可由比较 (3.1) 与 (3.7) 式，或 (3.2) 式与 (3.8) 式而立即导出。因为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 下的每一次付款都比 $a_{\overline{n}|}$ 下的每一次付款早一个时期，故由于一个时期的利息，它的总现时值一定较大。公式 (3.14) 也能类似地导出。

在延付年金与初始年金间还有另一种形式的关系，即

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}. \tag{3.15}$$

此公式可由图 3.2 导出。$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 下的 n 次付款可以分为第一次付款及余下的 $n-1$ 次付款。第一次付款的现时值为 1, 而其余 $n-1$ 次付款的现时值为 $a_{\overline{n-1}|}$ 。其和即给出总现时值 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 。

类似可得

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1. \tag{3.16}$$

这一公式也可由图 3.2 导出。暂时虚设在第 n 个时期之末有一次付款 1 。这样，$n+1$ 次付款的总积累值为 $s_{\overline{n+1}|}$ 。然而，我们必须去掉虚设付款的积累值，它就是 1, 其差即给出积累值 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 。

多数复利表，包括附录 I 中的那些，并不包含初付年金的值。这样，必须用 (3.13) 或 (3.15) 及 (3.14) 或 (3.16) 来确定初付年金的数值。

如果认为延付年金与初付年金有重大的区别，那么常会造成混淆。实际上它们涉及的只是在不同时刻支付的同一系列付款。

图 3.3 可以说明这一点。

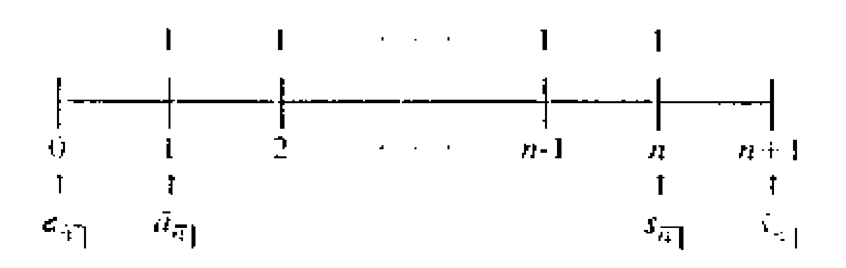


图 3.3 比较延付年金与初付年金的时间图

例 3.4 一位投资者希望投资一笔基金，到第 12 年之末积累到 \$1000 。为此他打算每年年底存入一笔钱，最后一次存款将在投资时期结束前一年。如果此基金的实质利率为 7%，问他每次应存多少钱？

因为我们感兴趣的是最后一次付款以后一年的积累值，故求值方程为

$$R\ddot{s}_{\overline{11}|} = 1000,$$

其中 R 是每年的储蓄额。解出 R 有

$$\begin{aligned} R &= \frac{1000}{\ddot{s}_{\overline{11}|}} \\ &= \frac{1000}{1.07s_{\overline{11}|}} \\ &= \frac{1000}{(1.07)(15.7836)} = \$59.21. \end{aligned}$$

§3.4 任意日期的年金值

到现在为止我们只是在期初 (第一次付款之日或其前一个时期) 或期末 (最后一次付款之日或其后一个时期) 计算年金。然而，

经常需要计算其他日期的年金值。我们将讨论三种情形：(1) 第一次付款前多于一个时期的现时值，(2) 最后一次付款后多于一个时期的积累值，(3) 在第一次和最后一次付款日期之间的当前值。我们假设计算的日期离开每次付款日期为整数个时期。

一种年金在任意日期的值可通过对各次付款的积累或贴现然后将结果相加而得到。然而，这一方法当付款次数很多时是不适当的。下面将会看到，对所有三种情况都可用已定义的年金符号来建立年金的值。

上述三种情况最好由例子来阐述。考虑一种年金，它共有 7 次付款 1，分别在第 3 时期末到第 9 时期末依次支付。图 3.4 是这种年金的时间图。在第 2, 3, 9, 10 时期末的值由延付年金或初付年金直接给出，如时间图上所示。

第 1 时期初的现时值是情形 1 的例子，第 12 时期末的积累值是情形 2 的例子，而第 6 时期末的当前值是情形 3 的例子。这三种情形在时间图上分别由箭头 1, 2, 3 表示。

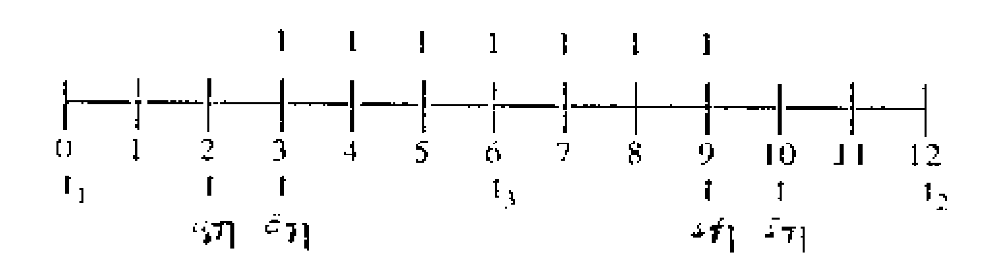


图 3.4　3.4 节中例子的时间图

一. 第一次付款日期前多于一个时期的现时值

在这种情形下，年金在第 1 时期初的现时值可被看作在第 2

时期末的现时值贴现两个时期，即

$$v^2 a_{\overline{7}|}.$$

对此现时值也可单单用年金的值来建立另一种表示式。暂时假设在第 1 时期末和第 2 时期末各有一次虚设的付款 1，这样，在时刻 $t=0$ 所有 9 次付款的现时值为 $a_{\overline{9}|}$ 。然而，必须减去两次虚设付款的现时值，即 $a_{\overline{2}|}$，这样，现时值的另一个表达式就是

$$a_{\overline{9}|} - a_{\overline{2}|}.$$

如果使用利息表，此表达式便于计算。

此种类型的年金常称为*延期年金*，因为仅在经过一个推迟的时期后才开始付款。一般说来，一项推迟了 m 个时期并在推迟时期后有 n 个时期的期限的延付年金，其现时值为

$$v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}. \tag{3.17}$$

应该注意，由于付款时间是在期末，故这种延期年金的第一次付款是在计算日期后 $m+1$ 个时期，而不是 m 个时期。

我们用延付年金而不是初付年金，是由于对延付年金而言利息表可直接提供其数值。然而，处理延期初付年金也是可能的。读者可以验证，此种情形的答案用初付年金来表示为

$$v^3 \ddot{a}_{\overline{7}|} = \ddot{a}_{\overline{10}|} - \ddot{a}_{\overline{3}|}.$$

二．最后一次付款日期后多于一个时期的积累值

在这种情形下，年金在第 12 个时期末的积累值，可看作第 9 个时期末的积累值再积累 3 个时期，即

$$s_{\overline{7}|}(1+i)^3.$$

此处也可用年金的值来建立另一种表达式。暂时假设在第 10，11 和 12 时期末均有虚设的付款 1，则所有 10 次付款的积累值

为 $s_{\overline{10}|}$ 。然而，必须减去虚设付款的积累值，即 $s_{\overline{3}|}$ 。这样，积累值的另一种表示为

$$s_{\overline{10}|} - s_{\overline{3}|}.$$

在一般情形下，一项 n 个时期的年金在最后一次付款后 m 个时期的积累值为

$$s_{\overline{n}|}(1+i)^m = s_{\overline{m+n}|} - s_{\overline{m}|}. \tag{3.18}$$

也可以处理初付年金而不是延付年金。读者可以验证此种情形的答案用初付年金来表示为

$$\ddot{s}_{\overline{7}|}(1+i)^2 = \ddot{s}_{\overline{9}|} - \ddot{s}_{\overline{2}|}.$$

三．第一次付款与最后一次付款日期间的当前值

在这种情形下，年金在第 6 时期末的当前值，可被看作第 2 时期末的当前值再积累 4 个时期，也可看作第 9 时期末的积累值贴现 3 个时期，即

$$a_{\overline{7}|}(1+i)^4 = v^3 s_{\overline{7}|}.$$

此处也可以建立一个单单按年金值表示的另一种表示式。把 7 次付款分为头 4 次付款和最后 3 次付款，头 4 次付款的积累值是 $s_{\overline{4}|}$，而最后 3 次付款的现时值为 $a_{\overline{3}|}$，所以当前值的另一表达式为

$$s_{\overline{4}|} + a_{\overline{3}|}.$$

在一般情形下，一项经过 m 次付款 $(m < n)$ 的 n 个时期年金，其当前值为

$$a_{\overline{n}|}(1+i)^m = v^{n-m} s_{\overline{n}|} = s_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|}. \tag{3.19}$$

也可以用初付年金而不是延付年金来处理。读者应验证这种情形得到的答案按初付年金表示为

$$\ddot{a}_{\overline{7}|}(1+i)^3 = v^4 \ddot{s}_{\overline{7}|} = \ddot{s}_{\overline{3}|} + \ddot{a}_{\overline{4}|}.$$

四. 总结

一般而言，总可以把年金在任何日期的值表示为延付年金的和或差，只要此日期为从每一付款日期算起整数个时期。其他的等价表示式也确实存在，读者请自行尝试把答案的一种形式变换为另一种形式。

读者不必试图靠记忆公式 (3.17), (3.18) 及 (3.19) 去解问题。任何此种类型的问题可以按本节中叙述的基本原则去处理。

读者也应留心观察，时间图上的标记只不过是帮助检验所包含的付款，但它们不影响结果。例如，我们可以把图 3.4 中的时间图重标为由 8 —20, 而不是由 0 —12, 各例子的答案均不变。时间图上影响解答的因素是付款的次数以及计算日期或相关于付款日期的比较日期。

如果需要寻找年金在一个并非离开每个付款日期为整数个时期的日期的值，则应该先对离开每次付款日期为整数个时期的日期确定年金的值，然后将此值积累或贴现分数时期到实际的计算日期。这一情形将在习题中研究。

§3.5 永久年金

永久年金 是这样一种年金，其付款将永远继续下去，即此年金的期限是无限的。虽然付款永远继续下去的年金看起来不太现实，但在实际中确实存在这样的例子。无偿还保证的优先股的股息，以及没有归还义务的英国政府统一债券都是永久年金的例子。优先股将在第七章中定义及进一步讨论。

延付永久年金的现时值记为 $a_{\overline{\infty}|}$, 并有

$$\begin{aligned} a_{\overline{\infty}|} &= v + v^2 + v^3 + \cdots \\ &= \frac{v}{1-v} \\ &= \frac{v}{iv} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i} \tag{3.20}$$

只要 $v < 1$, 亦即 $i > 0$ 的情形。

换一种说法，有

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i},$$

因 $\lim_{n\to\infty} v^n = 0$ 。

公式 (3.20) 可以按字面解释。如果将本金 $1/i$ 按利率 i 投资，则利息 $i \cdot \frac{1}{i} = 1$ 可永远在每一时期末支付，而不去触动本金。

由类似讨论，对初付永久年金有

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}. \tag{3.21}$$

应该注意，永久年金的积累值并不存在，因为付款将永远继续下去。

利用永久年金的概念对公式 (3.2) 给出字面解释是很有意思的。

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}. \tag{3.2}$$

考虑两种永久年金，第一种在每个时期末付款 1 而有现时值 $1/i$, 第二种则推迟 n 个时期，故有现时值 v^n/i 。两者之差就是在推迟期间每个时期末付款 1 的现时值，它就是 $a_{\overline{n}|}$ 。

有些读者也许会觉得永久年金的实际意义有限。然而，有一类比永远持续付款范围更广泛的金融业务可被看作等价于永久年金。例如考虑一笔 \$1000 的投资，年实质利率为 10%, 每年分期支付利息，这样一笔投资在任何一个特定的时期的期末均可回复到有本金 \$1000 。这样一项业务等价于决定一笔每年底付款 \$100, 实质利率为 10% 的永久年金的现时值。

例 3.5　A 留下一笔 \$100000 的遗产。这笔财产头 10 年的利息付给受益人 B, 第 2 个 10 年的利息付给受益人 C, 此后的均付给慈善事业 D 。若此项财产的年实质利率为 7%, 试确定 B, C, D 在此笔财产中各得多少份额。

B 所占份额为

$$7000a_{\overline{10|}} = 7000(7.0236) = \$49165,$$

算到元为止。

C 所占份额为

$$7000(a_{\overline{20|}} - a_{\overline{10|}}) = 7000(10.5940 - 7.0236) = \$24993,$$

算到元为止。

D 所占份额为

$$7000(a_{\overline{\infty|}} - a_{\overline{20|}}) = 7000\left[\frac{1}{0.07} - 10.5940\right] = \$25842,$$

算到元为止。

注意 B, C, D 所占份额之和正如预期为 \$100000 。还要注意在第 20 年之末, 这笔财产的现时值为 $100000(1.07)^{-20} = \$25842$ 。它等于 D 所占份额。这使人确信，慈善事业 D 不断地从年金收取利息或在第 20 年末一次性接受剩余财产在价值上是相等的。

§3.6　非标准时期与利率

到现在为止，我们总是假设在年金符号中 n 为正整数且 $i > 0$ 。本节将考虑这些条件不满足的情形。本节的大部分结果主要来自数学上的兴趣，而不是实际的兴趣。然而，这些结果已出现在文献上，因此需要处理。而且其分析也很有指导意义。

首先来考虑，当 n 为正整数及 $0 < k < 1$ 时，符号 $a_{\overline{n+k}|}$ 可能代表什么意义。这时不能应用 (3.1) 式，因为它需要 n 为正整数。然而，可以导出下面这个与 (3.2) 式相一致的结果：

$$\begin{aligned} a_{\overline{n+k}|} &= \frac{1 - v^{n+k}}{i} \\ &= \frac{1 - v^n + v^n - v^{n+k}}{i} \\ &= a_{\overline{n}|} + v^{n+k}\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

这样，$a_{\overline{n+k}|}$ 与公式 (3.2) 一致的解释是：它是一项 n 个时期，每时期付 1 的延付年金再加上最后一次在时刻 $n+k$ 的付款 $\frac{(1+i)^k-1}{i}$ 的现时值。

这一最后的非正规付款的金额看起来相当不平常。某些读者可能会觉得更"舒服"的付款应是 k，即此付款应该正比于所包含的分数时期。幸而 k 是相当靠近 $\frac{(1+i)^k-1}{i}$ 的。在习题中将要求读者确定这一近似所包含的误差。

然而，也可以对记号 $a_{\overline{n+k}|}$ 给出其他合适的解释。例如，可否置最后一次付款为 k，但让它在时刻 $n+1$ 支付？还有其他的可能性。这样，如果不进一步描述实际上包含怎样的付款形式，$a_{\overline{n+k}|}$ 事实上将不是一个意义明确的符号。

不幸，在实际生活中确实提出了解释非整数时期年金符号的需要。例如，许多法庭在处理个人伤害及不正当死亡诉讼中度量经济损失时，常常使用一个人估计寿命的确定年金。如果诉讼中受伤的一方估计寿命为 15.7 年，则其确定年金的正确值应是多少？这一问题并没有明确的答案，进一步的解释是需要的。

也可以对 n 为负值时的年金建立恒等式。然而，这种年金只同数学有关，它缺少实际意义。为了完整性的缘故，在习题中建立了这样的恒等式。

下面考虑当 $i \le 0$ 时会发生什么情形。 $i = 0$ 的情形在实际中是重要的。如果 $i = 0$, 则任何年金的现时值或积累值只不过是付款的总和。从而特别有

$$a_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}} = n \quad 若 i = 0. \tag{3.23}$$

如果 $i < 0$, 会产生某些有趣的结果。现时值变成了积累值，反之亦然，此事在直观上很能引起人们的兴趣。在习题中将建立这些结果，但它们的意义主要在理论上而不是实际上。

§3.7　未知时间问题

至今在任何包含年金的问题中，我们假设 n 和 i 均为已知。在 3.7 节中将讨论 n 为未知的情形，而在 3.8 节中将讨论 i 为未知的情形。

一般而言，包含未知时间的问题不见得正好产生 n 是整数的解答。这些问题可以象 3.6 节中那样处理，即在最后一次正规付款以后的时期中作一次较小的付款。

但在实践中却很少这样做，因为在一个离开其他付款日期不是整数个时期的日期进行付款，这既不方便又容易混淆。例如，在若干年内每年 7 月 1 日作正规付款，而最后一次却在 11 月 27 日作较小的付款，这对业务双方都是不方便的。

在实践中经常采取的做法是：或者在最后一次正规付款的同时作一次较小的附加付款，事实上等于给出一个比正规付款为大的付款，称为*上升支付*；或者在最后一次正规付款的后一个时期作一次较小的付款，称为*下降支付*。自然，这两种情形下的较小付款数量上是不相等的，它们也与象 3.6 节中所说的在某个中间时刻的较小付款不相同。然而，所有这些付款是等价的。

包含未知时间的问题最好由例子来展示。

例 3.6　有一笔 \$1000 的投资用于在每年年底付 \$100, 时间尽可能长。如果这笔基金的年实质利率为 5%, 试确定可以作出多

少次正规付款以及确定较小付款的金额，其中假定较小付款是：(1) 在最后一次正规付款的日期支付，(2) 在最后一次正规付款以后一年支付，(3) 按 3.6 节所述，在最后一次付款后的一年中间支付。

求值方程为

$$100a_{\overline{n}|} = 1000$$

或

$$a_{\overline{n}|} = 10.$$

查对利息表，知 $14 < n < 15$ 。这样，应有 14 次正规付款再加一次较小的最后付款。图 3.5 是此例的时间图。

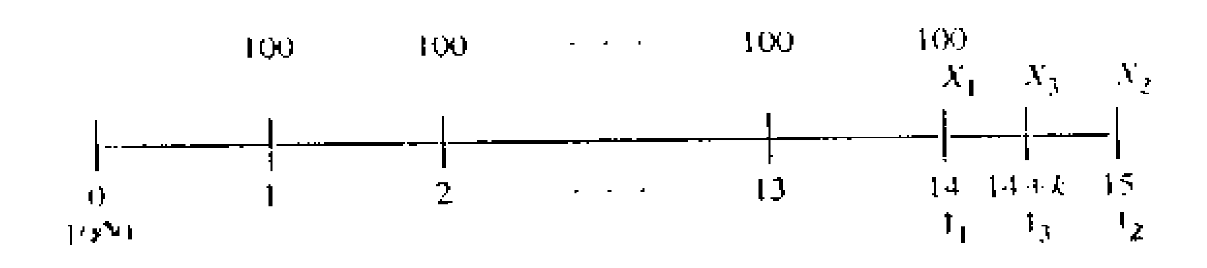


图 3.5　例 3.6 的时间图

在此图中，X_1, X_2 和 X_3 是上述三种情况的较小最后付款，箭头 1, 2, 3 可比较上述三种情况的日期，而 k 的意义见公式 (3.22) 。

1. 在第 14 年末的求值方程为

$$100s_{\overline{14}|} + X_1 = 1000(1.05)^{14},$$

从而

$$\begin{aligned} X_1 &= 1000(1.05)^{14} - 100s_{\overline{14}|} \\ &= 1979.93 - 1959.86 \\ &= \$20.07. \end{aligned}$$

2. 在第 15 年末的求值方程为

$$100\ddot{s}_{\overline{14}|}+X_2=1000(1.05)^{15},$$

故

$$\begin{aligned}X_2 &= 1000(1.05)^{15}-100(s_{\overline{15}|}-1)\\ &= 2078.93-2057.86\\ &= \$21.07.\end{aligned}$$

应注意 $20.07(1.05)=21.07$, 或一般 $X_1(1+i)=X_2$, 读者可由一般推理校核此项结果。

3. 在此种情形下求值方程为

$$100a_{\overline{14+k}|}=1000$$

或

$$a_{\overline{14+k}|}=10,$$

其中 $0<k<1$ 。

这可以写为

$$\frac{1-v^{14+k}}{i}=10$$

或

$$v^{14+k}=1-10i=0.5.$$

这样

$$(1.05)^{14+k}=2,$$

给出

$$\begin{aligned}14+k &= \frac{\log_e 2}{\log_e 1.05}\\ &= \frac{0.693147}{0.048790}\\ &= 14.2067\end{aligned}$$

或

$$k = 0.2067.$$

故由公式 (3.22) 知精确的最后非正规付款为

$$X_3 = 100\frac{(1.05)^{0.2067} - 1}{0.05} = \$20.27,$$

在时刻 14.2067 支付。对精确金额的一个通常的近似为 $100k$ 或 \$20.67 。精确解答位于解答 1 与解答 2 之间，这正是我们所预期的。显然如果需要精确解答的话，用公式 (3.22) 不仅不方便，而且也是更困难的。

例 3.7　一笔基金每年年底存入 \$1000, 一直到积累值为 \$25000 为止, 如果基金的实质利率为 8%, 试确定需要多少次正规储蓄，及在最后一次正规储蓄后一年的最后储蓄金额应为多少。

求值方程为

$$1000 s_{\overline{n}|} = 25000$$

或

$$s_{\overline{n}|} = 25$$

查对利息表，有 $14 < n < 15$ 。

这样，需有 14 次正规储蓄加一次较小的最后储蓄 X 。在第 15 年末的求值方程为

$$1000\ddot{s}_{\overline{14}|} + X = 25000.$$

这样

$$\begin{aligned} X &= 25000 - 1000(s_{\overline{15}|} - 1) \\ &= 25000 - 26152 \\ &= -\$1152, \end{aligned}$$

计算到元为止。

这时发生的情况是最后一次正规储蓄使基金足够靠近 $25000，而单单最后一年的利息就足够造成基金超过 $25000 。在第 14 年末的基金余额为

$$1000s_{\overline{14|}} = \$24215.$$

而仅最后一年的利息就使基金在第 15 年末的余额为

$$24215(1.08) = \$26152.$$

它超过了需要的基金达 $1152，这一结果与上面所述相符。这一例子不能认为是经典的，因为通常最后一次储蓄还是需要的。不过这确实告诉我们陷阱是存在的，为了得到合理的答案必须小心从事。

§3.8 未知利率问题

本节中我们将考虑利率为未知的情形。如 2.7 节中所述，在实践中广泛遇到需决定未知利率的问题。

在此考虑决定未知利率的三种方法。第一种是用代数方法解 i 。例如，一项 n 年延付年金的基本定义是

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^n, \tag{3.1}$$

它是 v 的 n 次多项式。如果能够用代数方法求出此多项式的根，则 i 就决定了。这种方法通常仅当 n 的值很小时才是实用的。

也可以将 $a_{\overline{n|}}$ 或 $1/a_{\overline{n|}}$ 用 i 来表示并用代数方法求解。由级数展开，有

$$a_{\overline{n|}} = n - \frac{n(n+1)}{2!}i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}i^2 - \cdots \tag{3.24}$$

及

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}i + \frac{n^2-1}{12}i^2 + \cdots\right]. \tag{3.25}$$

(3.24) 式与 (3.25) 式的推导留作习题。通常宁愿用 (3.25) 而不是 (3.24)，因为它的收敛速度更快。利用公式 (3.24) 或 (3.25) 并不是数值上求解未知利率的特别有吸引力的方法。然而，这些公式确有价值，因为它们与本节稍后及第 7 章中其他一些更有用的近似公式的推导有联系。

第二种方法是在利息表中用线性插值。这类似于 2.7 节中所用方法。应该指出，线性插值的精度依赖于表中出现的利率相互靠近的程度。

第三种，也是最好的方法是 *逐次逼近* 或 *迭代* 。这种方法可以应用于属此类型的所有问题，并且只要进行足够次数的迭代就可达到所要求的任意精度。此方法需使用有指数和对数函数的计算器，而前两种方法则并不需要。

可以应用迭代法于方程

$$i = g(i), \tag{3.26}$$

其近似解存在且收敛于真解 i 。

首先假设一初始值，记为 i_0，然后由公式

$$i_1 = g(i_0)$$

生成一个值 i_1 。一般说来，$i_1 \neq i_0$ 。所以需要再试一次。由

$$i_2 = g(i_1)$$

产生值 i_2 。如此一直做下去。

如果迭代收敛，则逐次逼近的值 $i_0, i_1, i_2, \cdots$ 将收敛于真解 i 。在实际应用中，迭代只要做到在需要的精度上近似满足 $i_{s+1} = i_s$ 就可以了。读者应该注意在第 1 章中符号 i_s 是表示从投资之日起第 s 时期的利率，这与此处的意义不同。

考虑这样的问题：$a_{\overline{n}|}$ 的值作为常数 k 给出，需要确定利率 i 以产生此值。可以从 (3.2) 式得到一个简单而直接的迭代法：

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{k}. \tag{3.27}$$

不幸的是，如同将从例 3.8 看到的，此种迭代公式的收敛速度较慢。

在此推荐一种强有力的，收敛很快的 Newton —Raphson 迭代法 。用这种方法解 $a_{\overline{n}|i} = k$ 的迭代公式是

$$i_{s+1} = i_s\left[1 + \frac{1-(1+i_s)^{-n} - ki_s}{1-(1+i_s)^{-n-1}\{1+i_s(n+1)\}}\right]. \tag{3.28}$$

公式 (3.28) 的推导留作习题。(3.28) 式较为复杂，对于一次孤立的计算可能不值得这样做，然而对于大量计算来说这是一个极好的方法，因为其收敛速度很快。

应用迭代法需要确定初始值。如果初始值接近于真根，迭代次数将可大大减少。可以用利息表中线性插值方法 (即前述第二种方法) 来得到好的初值。

然而，还有一种决定初值的方法，它比利息表中线性插值更方便。这种方法就是直接应用一个仅基于 n 和 k 的近似公式。这样一个公式可以由 (3.25) 式的头两项来导出，即

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \doteq \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}i\right],$$

它给出

$$\frac{n+1}{2n}i \doteq \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{n-k}{nk}$$

或

$$i \doteq \frac{2(n-k)}{k(n+1)}. \tag{3.29}$$

(3.29) 式类似于 7.6 节中给出的计算近似债券收益的常用公式。那时将会给出对 (3.29) 式的一个字面解释。

对于积累值也可导出类似于公式 (3.28) 和 (3.29) 的结果。解 $s_{\overline{n}|i}=k$ 的 Newton —Raphson 迭代公式是

$$i_{s+1}=i_s\left[1+\frac{(1+i_s)^n-1-ki_s}{(1+i_s)^{n-1}\{1-i_s(n-1)\}-1}\right]. \tag{3.30}$$

类似于 (3.29) 的公式由下式给出：

$$i\doteq\frac{2(k-n)}{k(n-1)}. \tag{3.31}$$

(3.30) 和 (3.31) 式的推导留作习题。

例 3.8 季度转换的年利率应为多少，才能使在 5 年内每季度之末付款 \$1000 的现时值为 \$16000?

设 $j=i^{(4)}/4$, 求值方程为

$$1000a_{\overline{20}|j}=16000$$

或

$$a_{\overline{20}|j}=16.$$

首先在利息表中作插值，定义

$$f(j)=a_{\overline{20}|j}-16.$$

我们要寻找 j, 使 $f(j)=0$ 。

查对利息表，有

$$f(0.0200)=16.3514-16=0.3514$$

及

$$f(0.0250)=15.5892-16=-0.4108.$$

现在构造线性插值

$$j = 0.0200 + 0.0050\frac{0.3514 + 0}{0.3514 + 0.4108} = 0.0223,$$

它给出

$$i^{(4)} = 4(0.0223) = 0.0892 \text{ 或} 8.92\%.$$

其次来看一看迭代法。我们当然可以用上面导出的线性插值作为初值，即取 $j_0 = 0.0223$ 。但在这时我们宁愿应用 (3.29) 式而得到

$$\frac{2(20-16)}{(16)(21)} = 0.0238.$$

首先来展示利用公式 (3.27) 的迭代，得到下述结果：

$$\begin{array}{llll}
j_0 = 0.0238 & j_4 = 0.02283 & j_8 = 0.02248 & j_{12} = 0.02234 \\
j_1 = 0.02345 & j_5 = 0.02270 & j_9 = 0.02243 & j_{13} = 0.02233 \\
j_2 = 0.02319 & j_6 = 0.02261 & j_{10} = 0.02239 & j_{14} = 0.02231 \\
j_3 = 0.02298 & j_7 = 0.02253 & j_{11} = 0.02237 & j_{15} = 0.02230
\end{array}$$

迭代 15 次后就停止了，因为此迭代收敛很慢。我们展开这样一个很慢的迭代，不是因为这是一个适用的好方法，而是要告诉大家在实践中必须留心选用有合理收敛速度的迭代方法。

现在转而试用 (3.28) 式的 Newton —Raphson 迭代法，得到下述结果

$$\begin{aligned}
j_0 &= 0.0238 \\
j_1 &= 0.0222459 \\
j_2 &= 0.0222623 \\
j_3 &= 0.0222623
\end{aligned}$$

我们只经过两次迭代就达到了七位小数的精度！而由公式 (3.27) 给出的很慢的 ad hoc 方法在经过 15 次迭代后甚至还达不到五位小数的精度。 Newton —Raphson 方法的威力实在是明显的。

事实上，利用例 2.10 中展示的方法，也可以得到一种比 (3.27) 式快得多的 ad hoc 迭代法。用此方法每循环需要两步计算，但每一循环可以多一位小数的精度。此种迭代留给读者作为习题。

至此，精确到六位小数的本题答案是

$$i^{(4)} = 4(0.0222623) = 0.089049 \text{ 或} 8.9049\%.$$

例 3.9　试导出如下的确定初始值的另一种公式以解 $a_{\overline{n}|i} = k$ 并应用于例 3.8:

$$i_0 = \frac{1 - \left[\frac{k}{n}\right]^2}{k}. \tag{3.32}$$

考虑 n 个量 $v, v^2, v^3, \cdots v^n$ 。这些量的算术平均是

$$\frac{v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n}{n} = \frac{a_{\overline{n}|}}{n} = \frac{k}{n}.$$

这些量的几何平均是

$$v^{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}} = v^{\frac{n+1}{2}}.$$

但我们知道，n 个不全相等的正数的算术平均是大于其几何平均的，因此就有

$$\frac{k}{n} > v^{\frac{n+1}{2}}.$$

将不等式右端用一个稍大的数代替并假设

$$\frac{k}{n} \doteq v^{\frac{n}{2}}$$

或

$$(1+i)^{-n} = \left[\frac{k}{n}\right]^2.$$

代入 (3.27) 式立即得到 (3.32) 式。

将 (3.32) 式应用于例 3.8 就得

$$j_0=\frac{1-\left[\frac{16}{20}\right]^2}{16}=0.0225,$$

它产生一个比 (3.29) 更靠近真解的初始值。

可以证明，为解 $s_{\overline{n}|i}=k$ 可给出一个类似的确定初值的公式

$$i_0=\frac{\left[\frac{k}{n}\right]^2-1}{k}. \tag{3.33}$$

第三个也能产生很好结果的确定初值的公式，可在 8.4 节中作为副产品得到，这将在那时再给出。

§3.9 变 利 息

至此为止，我们都假设在整个年金期间利率处于同一水平。本节中将考虑每时期可有不同利率的情形，但仍计复利。不包括复利的其他变化类型将在 3.10 节中讨论。

如同在第一章中一样，以 i_k 记第 k 个时期的利率，即从时刻 $k-1$ 到时刻 k 这一时段的利率。我们首先考虑一项 n 个时期的延付年金的现时值。

这时包含两种变化类型。第一种类型是认为 i_k 是第 k 个时期所用的利率，不管付款是在什么时候。此种情形的现时值为

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|} &= (1+i_1)^{-1}+(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}+\cdots+\\ &\quad +(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_n)^{-1}\\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

第二种类型在计算现时值时，将 i_k 视作在时刻 k 的付款经历所有 k 个时期的利率，在这种情形下现时值成为

$$a_{\overline{n}|} = (1+i_1)^{-1}+(1+i_2)^{-2}+\cdots+(1+i_n)^{-n}$$

$$= \sum_{t=1}^{n}(1+i_t)^{-t}. \tag{3.35}$$

现在转向积累值。我们考虑 $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ 值而不是 $s_{\overline{n|}}$，这样所有的 i_k 值 $(k=1,2,\cdots,n)$ 都将进入公式。同样也有两种变化类型。假若第 k 个时期所用利率是 i_k，而不管何时付款，则有

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i_n)+(1+i_n)(1+i_{n-1}) \\ &\quad +\cdots+(1+i_n)(1+i_{n-1})\cdots(1+i_1) \\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1}).\end{aligned} \tag{3.36}$$

另一种情况，如果第 k 次付款在余下的积累期间按利率 i_k 计息，则有

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i_n)+(1+i_{n-1})^2+\cdots+(1+i_1)^n \\ &= \sum_{t=1}^{n}(1+i_{n-t+1})^t.\end{aligned} \tag{3.37}$$

延付年金的积累值可由初付年金的积累值经公式 (3.16) 而得，即 $s_{\overline{n+1|}} = \ddot{s}_{\overline{n|}} + 1$ 。

读者应当仔细地区别上述两种计算利息的不同类型，因为两者在实践中都会发生。实质上，公式 (3.34) 和 (3.36) 假定，任一给定时期的利率，对于那些其值受到在这一时期内利息影响的付款来说都是相同的。另一方面，(3.35) 与 (3.37) 式则假定，每一笔付款有其相应的利率，这一利率在其计算现时值或积累值的整个时期保持同一水平。前者的情形在 10.2 节中会看到有重要的实际应用，而后者的情形则在 9.6 节中会看到有重要的实际应用。

在实践中，利率常常不是每个时期都有改变，而是几个时期才改变一次。在这种情形下，现时值或积累值可由本章前面所给

出的年金值直接得到，这常比直接应用上面所给出的公式更容易些。

例 3.10　试确定一笔每年付款 \$100, 为期 10 年的延付年金的积累值，假定前 6 年的实质利率为 5%, 而后 4 年为 4% 。

我们可以用公式 (3.36), 然而下面的方法将更简单，经过 6 年后头 6 次付款的积累值为

$$100s_{\overline{6}|0.05}.$$

此值按 4% 积累到第 10 年末，故有

$$100s_{\overline{6}|0.05}(1.04)^4.$$

最后 4 次付款的积累值为

$$100s_{\overline{4}|0.04}.$$

这样，答案为

$$\begin{aligned} & 100[s_{\overline{6}|0.05}(1.04)^4 + s_{\overline{4}|0.04}] \\ = \ & 100[(6.8019)(1.16986) + 4.2465] \\ = \ & \$1220.38. \end{aligned}$$

例 3.11　重新考虑例 3.10 。如果条件更改为：头 6 次付款按实质利率 5% 投资，最后 4 次付款按 4% 投资。

我们可以用公式 (3.37), 但也可提供一个更简单的方法。用类似于例 3.10 的方案，得：

$$\begin{aligned} & 100[s_{\overline{6}|0.05}(1.05)^4 + s_{\overline{4}|0.04}] \\ = \ & 100[(6.8019)(1.21551) + 4.2465] \\ = \ & \$1251.43. \end{aligned}$$

请读者按常理比较一下例 3.10 和 3.11 答案的大小。

§3.10　非复利年金

非复利年金的计算充满着陷阱，需要仔细分析和解释才能得到合理的结果。一般会产生年金的多重值，它又需要按计算时所依据的基准来分类。事实上，如果可能的话，最好避免处理非复利年金。

不幸的是，有时无法避免这类课题。例如，偶而有些法庭在处理个人伤害与不正当死亡的诉讼中，需要用单利计算包含损失收入的年金值。这类计算的“正确”程序不仅是含糊不清的，而且若在计算中包含有某个重要的时期，还会产生严重的歪曲。

非复利年金值这个题目也在各种形式的文献中出现。因此，我们应当让读者了解已出现的某些结果及所包含的复杂性。

回到积累函数作为计算年金值的基础是合乎逻辑的。一项 n 个时期的延付年金的现时值等于各次付款的现时值之和。这样，(3.1) 式的一个推广形式就是

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{a(t)}. \tag{3.38}$$

然后转向寻找 $s_{\overline{n}|}$ 的值。如假设在时刻 t 投资 1, 其中 $t = 1, 2, \cdots, n-1$, 则在时刻 n 将积累到 $\frac{a(n)}{a(t)}$, 于是有

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{a(n)}{a(t)} = a(n) \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{a(t)}. \tag{3.39}$$

这看来在某些情形下是一个合适的程序，例如对于在 n 个时期中包含变利息效力的问题。然而，它并非对所有情形都产生正确的结果。例如，假定我们希望确定一项 n 个时期延付年金的积累值，而此项年金每一笔付款都是从付款之日起到第 n 个时期末为

止按单利投资的，那么这样一项年金的积累值应为

$$1+(1+i)+(1+2i)+\cdots+[1+(n-1)i].$$

这就得到 (3.3) 式的推广形式

$$s_{\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}a(t). \tag{3.40}$$

它会产生以上单利例子的正确答案。

然而，很容易证明 (3.39) 与 (3.40) 在单利下并不产生相同的结果。事实上，可以证明 (3.39) 与 (3.40) 对除了复利以外的其他利息类型一般均不产生相同的结果。

对于喜欢系统性与完整性的读者，我们可以用 (3.40) 去确定 $a_{\overline{n}|}$ 的另一个表达式

$$a_{\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{a(t)}{a(n)}=\frac{1}{a(n)}\sum_{t=0}^{n-1}a(t). \tag{3.41}$$

毫不奇怪，除非使用复利，否则 (3.38) 与 (3.41) 将产生不同的答案。

对单利下年金值的进一步分析是很有教益的。考虑一笔以单利进行 n 个时期的投资，它恰好足够在 n 个时期中每时期末取款 1 。单利的概念意味着利息并不再赚取外加的利息。这样，原始的投资金额是储蓄在一笔利率为 i 的基金中，但任何得到的利息立即转存到第二笔基金中，后者没有利息。

每当取款时会产生混淆。应当从有利息的原始基金中取多少款，又从没有利息的利息基金中取多少款？依赖于不同的分配将产生不同的答案。

为了展示会得到的若干可能答案，设 $n=6$ 及 $i=10\%$ 。记原始投资为 K 。称本金基金为“基金 1”，而利息基金为“基金 2”。

一种极端情形是尽可能从基金 2 取款，仅当基金 2 取完后才从基金 1 取款。在第 1 时期末由基金 1 得到利息 $.1K$ 并存入基金 2, 接着取款 1, 其中 $.1K$ 来自基金 2 而 $1-0.1K$ 来自基金 1 。这样基金 1 就有了新的余额 $K-(1-0.1K)=1.1K-1$ 。在第 2 时期末由基金 1 得到利息 $.1(1.1K-1)$ 并存入基金 2, 接着取款 1, 其中 $.1(1.1K-1)$ 来自基金 2 而 $1-0.1(1.1K-1)$ 来自基金 1 。基金 1 的新余额为

$$\begin{aligned}&(1.1K-1)-[1-0.1(1.1K-1)]\\=\;&(1.1)^2K-(1+1.1).\end{aligned}$$

若此过程再进行 4 年，则基金 1 在第 6 年末的余额为

$$(1.1)^6K-[1+1.1+(1.1)^2+(1.1)^3+(1.1)^4+(1.1)^5],$$

而基金 2 的余额为零。然而基金 1 在第 6 年末的余额在最后一次取款以后必须为零。这样

$$K=\frac{(1.1)^6-1}{(1.1)^6(1.1-1)}=\frac{1-(1.1)^{-6}}{0.1}=4.36,$$

它正是 $a_{\overline{6}|0.1}$ 使用复利的值。在第 6 章中我们将发现这并非巧合。这一方法的结果总结在表 3.1 中。

表 3.1　基金的进展 —— 从基金 2 取款优先于基金 1, 本金 $a_{\overline{6}|}$, 利率 10%

时期	基金 1 余额		基金 2 余额	
	取款前	取款后	取款前	取款后
0	N/A	4.355	N/A	0
1	4.355	3.791	0.436	0
2	3.791	3.170	0.379	0
3	3.170	2.487	0.317	0
4	2.487	1.736	0.249	0
5	1.736	0.910	0.174	0
6	0.910	0.001*	0.091	0

* 除去 .001 舍人误差为零

另一种极端情形是尽量先从基金 1 中取款，只有当基金 1 取完后才从基金 2 中取款。注意到上面的答案，我们假设基金 1 在第 5 时期末取完。以后必须确认此答案与上述假设一致。在第 1 时期末由基金 1 得到 $.1K$ 的利息并存入基金 2 。随即取款 1, 它全部来自基金 1 。这样基金 1 的新余额为 $K-1$, 而基金 2 的新余额为 $.1K$ 。在第 2 时期末由基金 1 中得到利息 $.1(K-1)$ 并存入基金 2 。接着取款 1, 全部来自基金 1 。这样基金 1 的新余额为 $K-2$, 而基金 2 的新余额为 $.1K+0.1(K-1)=0.2K-0.1$ 。若此过程再进行 2 个时期，则在基金 1 中有 $K-4$, 我们已假设它位于 0 与 1 之间。而在基金 2 中有

$$0.1[K+(K-1)+(K-2)+(K-3)]=0.4K-0.6.$$

在第 5 时期末，由基金 1 得到利息 $.1(K-4)$ 并存入基金 2, 然后取款 1, 其中 $K-4$ 来自基金 1, 它现在取完了，而其余款项，即 $1-(K-4)=5-K$ 则来自基金 2 。基金 2 的新余额为

$$(0.4K-0.6)+0.1(K-4)-(5-K)=1.5K-6.$$

在第 6 时期末没有得到利息，因为基金 1 已取完了，基金 2 的余额则不变，因为基金 2 是没有利息的。最后的取款 1 完全来自基金 2 并将其取完，所以有

$$\begin{aligned} 1.5K-6 &= 1 \\ K=\frac{7}{1.5} &= 4.67=a_{\overline{6}|}. \end{aligned}$$

这一答案是有效的，因为符合于假设 $4<K<5$ 。如果得到的某个解答落在此区间以外的话，整个问题就只好重解一遍，直到得到一个与关于基金 1 何时取完的假设相一致的解答为止。这一方法的结果总结在表 3.2 中。

表 3.2　基金的进展 —— 从基金 1 取款优先于基金 2, 本金 $a_{\overline{6}|}$, 利率 10%

时期	基金 1 余额		基金 2 余额	
	取款前	取款后	取款前	取款后
0	N/A	4.667	N/A	0
1	4.667	3.667	0.467	0
2	3.667	2.667	0.834	0.834
3	2.667	1.667	1.101	1.101
4	1.667	0.667	1.268	1.268
5	0.667	0	1.268	1.002**
6	0	0	1.002	0.002*

* 除去 .002 舍入误差为零

** 按 $1.268+0.1(0.667)-(1-0.667)=1.002$ 计算

其次直接应用 (3.38) 并得

$$a_{\overline{6}|}=\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.6}=4.52,$$

它位于已经得到的两个极端解答之间。显然, (3.38) 式包含着一个从基金 1 和基金 2 取款的隐含的中间分配, 它介于两个极端之间。

如果用公式 (3.41), 则得到

$$a_{\overline{6}|}=\frac{1+1.1+\cdots+1.5}{1.6}=4.69,$$

它超出了由两个极端所界定的范围之外。这样, 我们一定会问 (3.41) 式究竟是否会产生有现实意义的结果, 至少在这个例子中是有疑问的。这一分析的结果总结在表 3.3 中。

至此读者应能完全确信寻找单利下的年金值是靠不住的。不仅如此, 单贴现也有许多困难。读者现在应当重视本节前面提出的警告: 如果可能的话, 尽量避免计算非复利年金值!

表 3.3　依照四种不同准则按 10% 单利计算的 $a_{\overline{6}|}$ 比较

准则	值
极低 (复利)	4.36
公式 (3.38)	4.52
极高	4.67
公式 (3.41)	4.69

例 3.12　比较按 10% 利率的 $s_{\overline{6}|0.1}$ 的值：(1) 假定按复利，(2) 用公式 (3.39), (3) 按公式 (3.40) 。

1. 利用 10% 的复利

$$s_{\overline{6}|} = 7.72.$$

2. 由公式 (3.39)

$$s_{\overline{6}|} = 1.6\left[\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.6}\right] = 7.23.$$

3. 由 (3.40) 式

$$s_{\overline{6}|} = 1 + 1.1 + 1.2 + \cdots + 1.5 = 7.50.$$

答案 3 包含了单利，其每笔付款的利息是从存入之日起计至 6 年投资期结束为止。答案 1 比其它两个都大，这与复利具有较大的积累值是符合的。

例 3.13　如果对 $0 \le t \le 5, \delta_t = 0.02t$ ，试确定 $s_{\overline{5}|}$ 。

倘若我们对每笔付款从存入之日起至 5 年期结束为止按变利息效力 δ_t 积累，则有

$$s_{\overline{5}|} \quad = \quad \sum_{t=1}^{5} e^{\int_t^5 \delta_r dr}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{5} e^{0.01r^2\big|_t^5} \\
&= e^{0.24} + e^{0.21} + e^{0.16} + e^{0.09} + 1 \\
&= 1.27125 + 1.23368 + 1.17351 + 1.09417 + 1 \\
&= 5.7726.
\end{aligned}
$$

另一种方法是用 (3.29) 式。将有

$$
\begin{aligned}
a(t) &= e^{\int_0^t \delta_r dr} \\
&= e^{0.01r^2\big|_0^t} \\
&= e^{0.01t^2}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
s_{\overline{5}|} &= a(5)\sum_{t=1}^{5}\frac{1}{a(t)} \\
&= e^{0.25}(e^{-0.01} + e^{-0.04} + e^{-0.09} + e^{-0.16} + e^{-0.25}) \\
&= e^{0.24} + e^{0.21} + e^{0.16} + e^{0.09} + 1 \\
&= 5.7726,
\end{aligned}
$$

它与上述第一种方法得到的结果一致。

习　题

§3.2　延付年金

1. 一个家庭希望在某一大学教育基金中，到第 20 年末积累到 \$50000 。如果他们在头 10 年中每年末存入 \$1000, 而在第 2 个 10 年中每年末存入 $\$1000 + X$, 若该项基金之实质利率为 7%, 试确定 X 到元为止。

2. 一辆新汽车的现金价为 \$10000 。某顾客想以月度转换 18% 利率的分期付款来购买此车，如果他在 4 年内每月末付款 \$250, 问现付款需为多少？

3. 一项年金在 n 年内每年末提供金额为 n 的付款。年度实质利率为 $1/n$ 。问此年金的现时值为多少？

4. 如果 $a_{\overline{n}|} = x$ 而 $a_{\overline{2n}|} = y$, 试将 d 表示为 x 和 y 的函数。

5. a) 证明 $a_{\overline{m+n}|} = a_{\overline{m}|} + v^m a_{\overline{n}|} = v^n a_{\overline{m}|} + a_{\overline{n}|}$ 。

b) 证明 $s_{\overline{m+n}|} = s_{\overline{m}|} + (1+i)^m s_{\overline{n}|} = (1+i)^n s_{\overline{m}|} + s_{\overline{n}|}$ 。

c) 给出 a) 与 b) 的字面解释。

6. a) 证明 $a_{\overline{m-n}|} = a_{\overline{m}|} - v^m s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{m}|} - s_{\overline{n}|}$, 当 $0 < n < m$ 。

b) 证明 $s_{\overline{m-n}|} = s_{\overline{m}|} - (1+i)^m a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{m}|} - a_{\overline{n}|}$, 当 $0 < n < m$ 。

c) 给出 a) 与 b) 的字面解释。

7. 给出下列的年金值

$$a_{\overline{7}|} = 5.153, a_{\overline{11}|} = 7.036, a_{\overline{18}|} = 9.180.$$

试确定 i 。

8. 证明

$$\frac{1}{1-v^{10}} = \frac{1}{s_{\overline{10}|}}\left[s_{\overline{10}|} + \frac{1}{i}\right].$$

§3.3　初付年金

9. 假设现在起立即开始每 6 个月付款 \$200 直到满 4 年，随后再每 6 个月付款 \$100 直到从现在起满 10 年，若 $i^{(2)} = 0.06$, 求这些付款的现时值。

10. 有一位 40 岁的工人打算通过在 25 年内每年初存款 \$1000 来积蓄一笔退休金，从 65 岁开始此工人计划在以后 15 年内每年初取款一次。假设所有存款都存了，试确定他从 65 岁开始每年取款的金额，其中在头 25 年实质利率为 8%, 而此后仅为 7% 。

11. 若实质贴现率为 10%, 试确定 $\ddot{a}_{\overline{8}|}$ 。

12. 导出公式 (3.12) 。

13. a) 证明 $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + 1 - v^n$ 。

b) 证明 $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} - 1 + (1+i)^n$ 。

c) 按字面解释 a) 和 b) 中的结果。

14. 证明

$$\frac{\ddot{s}_{\overline{2n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} - \frac{\ddot{s}_{\overline{3n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} = 1.$$

15. 若 $\ddot{a}_{\overline{p}|} = x$ 及 $s_{\overline{q}|} = y$, 证明 $a_{\overline{p+q}|} = \frac{vx+y}{1+iy}$ 。

§3.4　任意日期的年金值

16. 用代数方法导出公式 (3.17), (3.18) 与 (3.19) 。

17. 从 Z 年 6 月 7 日起到 $Z+11$ 年 12 月 7 日 (此日包含在内) 每季度付款 \$100 。若季度转换名义利率为 6%,

a) 确定 $Z-1$ 年 9 月 7 日的现时值。

b) 确定 $Z+8$ 年 3 月 7 日的当前值。

c) 确定 $Z+12$ 年 6 月 7 日的积累值。

18. 证明

$$\sum_{t=10}^{15}(\ddot{s}_{\overline{t}|} - s_{\overline{t}|}) = s_{\overline{16}|} - s_{\overline{10}|} - 6.$$

19. 年金 X 和 Y 提供下列付款

年度之末	年金 X	年金 Y
1 —10	1	K
11 —20	2	0
21 —30	1	K

若年金 X 和 Y 在使 $v^{10} = 1/2$ 的年度实质利率下有相等的现时值, 试确定 K 。

20. 已知在年实质利率 i 下有:

(1) 在 $2n$ 年内每年末付 2, 加上在头 n 年内每年末附加付 1, 其现时值为 36,

(2) 一项 n 年延期延付年金，在 n 年内每年付 2, 其现时值为 6,

试确定 i 。

21. 已知 $\frac{a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{11}|}} = \frac{a_{\overline{3}|}+s_{\overline{x}|}}{a_{\overline{y}|}+s_{\overline{z}|}}$, 试确定 x, y 与 z 。

22. 将 $a_{\overline{15}|}(1+v^{15}+v^{30})$ 简化为一个符号。

23. 确定一项年金在 1 月 1 日的现时值到元为止。此项年金每 6 个月付 \$2000, 共付 5 年。第一次付款是在下一个 4 月 1 日，而利率为半年度转换 9% 。

§3.5　永久年金

24. 用款项 P 去购买一项每年付款 1 的延期初付永久年金。年度实质利率为 $i>0$ 。试确定延迟时期的表达式。

25. 在今后 20 年内，每年初向一基金存入 \$1000 。 30 年以后开始每年付款且永远持续下去，其中第一笔付款是在第 30 年之末。确定每次付款金额的表达式。

26. 一位捐助人留下一笔遗产赠给四家慈善团体 A, B, C 和 D 。总的遗产是一系列永远继续下去的付款，在每年底支付，金额相同。在头 n 年内 A, B, C 以同等的份额分享每笔付款， n 年以后所有付款将归于 D, 如果 A, B,C 和 D 分享份额的现时值相等，试确定 $(1+i)^n$ 。

27. 一项等额的延付永久年金由 A, B, C 和 D 分享。 A 接受头 n 次付款， B 为第二个 n 次， C 为第三个 n 次付款，而 D 将在此后获得所有付款。已知 C 所占份额现时值对 D 所占份额现时值之比为 .49 。问 B 所占份额现时值与 D 所占份额现时值之比为多少？

§3.6　非标准时期与利率

28. 确定用 k 近似代替 $\frac{(1+i)^k-1}{i}$ 的误差表达式。

29. 用下列定义来计算当 $i=5\%$ 时的 $a_{\overline{5.25}|}$ 。

a) 公式 (3.22) 。

b) 在时刻 5.25 付 .25 。

c) 在时刻 6 付 .25 。

30. 在书中年金符号仅对正的 n 值有定义。试对 a) $a_{\overline{-n}|}$ 和 b) $s_{\overline{-n}|}$ 找出其与 (3.2) 和 (3.4) 式一致的表达式。

31. 对用负利率计算的年金值导出下列公式

a) $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|-d}$ 。

b) $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|-d}$ 。

§3.7　未知时间问题

32. 用下列方式还清一笔 \$1000 的贷款：从第 5 年末起，每年付款 \$100，一直持续到还清为止。假如 $i = 4\frac{1}{2}\%$，求最后一次付款的时间与金额，其中最后一次付款额设为大于正规付款。

33. 用下列方式积累一笔 \$2000 的基金：先是 n 次每年 \$50 的付款，继之以 n 次每年 \$100 的付款，再加上一次在最后一次正规付款后一年支付的较小付款。倘若实质利率为 $4\frac{1}{2}\%$，试确定 n 及最后一次非正规付款的金额。

34. 一笔年金在 36 年内每年底付 4，另一笔年金在 18 年内每年底付 5 。在某一实质利率 i 下这两笔年金的现时值相等。倘若另有一笔以同样利率 i 投资的款项在 n 年内翻倍，求 n 。

35. 一笔基金每年初存入 \$500，以 8% 的实质利率积累 20 年。试确定如每年末取款 \$1000，最多能取多少次。条件是一旦开始取款，必须持续到 20 年末。

36. 某借款人有两种偿还一笔贷款的选择：

(1) 每月末付款 \$100 的 60 次月度付款。

(2) 在第 K 个月末一次付款 \$6000 。

利率为月度转换名义年利率 12%，两种选择有同样的现时值。试确定 K 。

§3.8　未知利率问题

37. 导出下列各式：

a) (3.24) 式。

b) (3.25) 式。

c) (3.28) 式。

d) (3.30) 式。

e) (3.31) 式。

38. 如果 $a_{\overline{2}|} = 1.75$, 确定 i 的精确表达式。

39. 利用例 2.10 中展示的 ad hoc 迭代方法重新考虑例 3.8 。

40. 用迭代公式

$$j_{s+2} = \frac{j_s f(j_{s+1}) - j_{s+1} f(j_s)}{f(j_{s+1}) - f(j_s)}$$

重新考虑例 3.8, 其中初值分别用例 3.8 中得到的两个初值，即 $j_0 = 0.0200$ 和 $j_1 = 0.0250$ 。

41. 通过每半年之末付款，可在 5 年内积累到一笔 \$17000 的基金。头 5 次付款为每次 \$1000, 后 5 次付款为每次 \$2000 。问此基金的半年度转换名义利率为多少？

42. 一位受益人接受了一笔 \$10000 的人寿保险利益，如果此受益人利用这笔收入去购买一项 10 年期的延付年金，每年付款将为 \$1538, 如果购买的是 20 年期延付年金，则年度付款为 \$1072, 两者均基于年度实质利率 i, 求 i 。

§3.9　变利息

43. a) 一笔延付年金在 5 年内每半年之末付款 1, 其中前 3 年利率为半年度转换 8%, 后 2 年利率为半年度转换 7%, 求其现时值。

b) 一笔延付年金在 5 年内每半年末付款 1, 其中前 3 年的付款按半年度转换 8% 计算现时值，后 2 年付款按半年度转换 7% 计算现时值，求其现时值。

c) 试从常理论证 (b) 的答案会大于 (a) 的答案。

44. 一笔贷款从贷款后 6 个月起开始以 10 次年度付款来偿还。第一次付款是其余付款的一半。对于前 $4\frac{1}{2}$ 年实质利率为 i,

其余时期实质利率为 j, 试求第一次付款金额的表达式。

45. 如果: (1) X 是一笔 20 年期每年付 1 的初付年金在时刻 2 的当前值, (2) 第 t 年的年度实质利率为 $\frac{1}{8+t}$, 求 X 。

§3.10 非复利年金

46. 假定每次付款均以单贴现率 d 计值, 试写出 $a_{\overline{n}|}$ 的表达式。

47. 若 $a(t)=\frac{1}{\log_2(t+2)-\log_2(t+1)}$, 由直接取付款的现时值找出 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 的表达式。

48. 假定 $\delta_t=\frac{1}{20-t}$, $t\geq 0$, 试确定 $s_{\overline{10}|}$ 。

49. 在时刻 $t>0$, 贴现函数由下式决定:

$$a^{-1}(t)=\frac{1}{1+0.01t}.$$

一项 5 年期年金在时刻 $t=1,2,3,4,5$ 各付款 1 。A 在时刻 0 直接计算这项年金的现时值, 而 B 则首先按积累函数 $a(t)=1+0.01t$ 来积累这些付款, 然后将结果乘上 $a^{-1}(5)$, 两种计算结果相差多少?

杂题

50. a) 证明 $s_{\overline{n}|}=n+\frac{n(n-1)}{2!}i+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}i^2+\cdots$

b) 证明 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}=\frac{1}{n}\left[1-\frac{n-1}{2}i+\frac{n^2-1}{12}i^2-\cdots\right]$ 。

51. 一项 \$1000 的贷款由今年起 20 年内每年末的年度付款来偿还。第 1 个 5 年付款为每年 k, 第 2 个 5 年为每年 $2k$, 第 3 个 5 年为每年 $3k$, 第 4 个 5 年为每年 $4k$ 。求 k 的表达式。

52. 一项延付年金在今后 10 年内每 6 个月付 \$200, 随后 10 年内每 6 个月付 \$100, 此项年金的现时值为 \$4000 。一项在 10 年内每 6 个月付 \$250 的延期 10 年延付年金的现时值为 \$2500 。试确定一项今后 10 年内每 6 个月付 \$200 及随后 10 年内每 6 个月付 \$300 的延付年金的现时值。(注: 可假设前 10 年与后 10 年分别有不同的利率。)

53. 一储户向一银行帐户存入 \$10000, 为期 10 年，年度实质利率为 4%, 并规定如果他在头 $5\frac{1}{2}$ 年内需取款，则需付出相当于取款金额 5% 的罚金。假若此储户在第 4, 5, 6, 7 年的每年末均取款 K, 到第 10 年末此帐户的余额为 \$10000, 求 K 。

54. 化简 $\sum_{n=15}^{40} s_{\overline{n}|}$ 。

55. 证明如 $i > 0$, 则 $s_{\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|} > n^2$ 。

第四章　一般年金

§4.1　引　言

在第三章中我们讨论的年金，其支付时期与利息转换时期都是相等且一致的，支付金额亦是等额的。在第四章中讨论的年金，其支付时期可与利息转换时期不相同，还将考虑支付金额可变的情形。

§4.2　支付频率不同于利息转换频率的年金

我们首先从付款时期与利息转换时期不同但付款为等额的情形着手。有两种不同的方法可用于处理这类年金。

如果目的只是计算一项年金的数值，且可提供带有指数函数和对数函数的计算器，则可以用第一种方法，此种方法遵循如下的两步程序：

1. 找出转换频率与支付频率相同的利率，它应与原给的利率等价。

2. 用此新的利率，确定用第三章中讨论方法的年金的值。

这一方法相当一般，且能用于支付频率不同于利息转换频率的年金。不仅如此，未知时间与未知利率的问题也能这样处理。我们将用例子来展示这种直接方法。

第二种方法包含对这类年金的代数分析。其目的是用第三章中已定义的年金符号来建立对这种年金的代数表达式，当然有时需要作一些调整。

读者可能会预料，支付频率小于利息转换频率的年金，其代数推演同支付频率大于利息转换频率的年金应该是类似的。但令

人惊奇的是，在文献中已经研究过的这两种情形，其定义和公式看来是很不相同的。支付频率小于利息转换频率的年金的代数分析将在 4.3 节中给出，而 4.4 节则分析支付频率大于利息转换频率的年金。

如果目的只是要得到这些年金的数值，则上述代数方法并非必需。虽然如此，它们一般说来对从解析角度理解年金是很有价值的。它们也为分析风险年金 (即一种由按实质利率计值的养老计划终生按月支付的年金) 提供了重要的基础。最后，它们还给出另一种可利用利息表的计算方法。

例 4.1　有一笔投资基金，在头两年每季度之初存入 \$100, 其次两年每季度之初存入 \$200, 若基金的利率为月度转换 12%, 问第 4 年末的积累值为多少？

给出的利率为每月 1%, 设 j 为等价的利率 (季度是支付周期), 则有

$$j = (1.01)^3 - 1 = 0.030301.$$

年金值用符号表示为

$$100(\ddot{s}_{\overline{16}|j} + \ddot{s}_{\overline{8}|j}),$$

可算出为

$$100(20.8170 + 9.1716) = \$2999,$$

算到元为止。

例 4.2　有一笔 \$3000 的贷款将在 5 年内以每季度末分期付款来偿还。倘若贷款利率为半年度转换 10%, 问每季度付款的金额应为多少？

利率是每半年 5%, 设 j 为季度 (付款周期) 的等价利率，即有

$$j = (1.05)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.024695.$$

以 R 记季度付款，则求值方程为

$$Ra_{\overline{20}|j} = 3000,$$

故

$$R = \frac{3000}{a_{\overline{20}|j}} = \frac{3000}{15.6342} = \$191.89.$$

例 4.3　倘若每个季度末付 \$100, 问年度实质利率应当为多少，才能在第 5 年末积累到 \$2500?

设 $j = i^{(4)}/4$ 为与上述相应的每季度利率，则第 5 年末的求值方程为

$$100s_{\overline{20}|j} = 2500$$

或

$$s_{\overline{20}|j} = 25.$$

利用 (3.33) 式得到迭代的初值为

$$i_0 = \frac{\left[\frac{25}{20}\right]^2 - 1}{25} = 0.0225.$$

然后利用 Newton —Raphson 迭代。用 (3.30) 式可得到下列逐次逼近值：

$$\begin{aligned} i_1 &= 0.022855, \\ i_2 &= 0.022854, \\ i_3 &= 0.022854. \end{aligned}$$

故年度实质利率为

$$i = (1.022854)^4 - 1 = 0.0946 \text{ 或} 9.46\%.$$

§4.3 支付频率小于利息转换频率的年金的进一步分析

在本节中将从代数上对支付频率小于利息转换频率的年金作进一步的分析。这一节将分为三部分：(1) 延付年金，(2) 初付年金，及 (3) 其他情形。

一. 延付年金

设 k 为一个支付时期内利息转换时期的个数，n 为年金以利息转换时期来度量的时期数，i 为每个利息转换时期的利率。我们假定每个支付时期包含整数个利息转换时期，这样 k 和 n 都是正整数。年金的支付次数是 n/k，它也是一个正整数。

一项年金如在每 k 个利息转换时期之末付 1，而总共有 n 个利息转换时期，则其现时值为

$$
\begin{aligned}
v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k}\cdot k} &= \frac{v^k - v^{n+k}}{1 - v^k} \\
&= \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1} \\
&= \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

这样我们得到了一个将此类年金的现时值用已定义的年金符号表示的表达式。

此项年金在最后一次付款后即时积累值为

$$
\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}. \qquad (4.2)
$$

也可用其他的论证方法来导出公式 (4.1) 和 (4.2)。总可以有这样一个值 R，使得在总共 n 个利息转换时期内每 k 个利息转换时期之末付 1 的这一系列支付可被在每个利息转换时期之末付 R

的一系列支付所代替，而且两者的现时值相等。这一系列支付的现时值为

$$Ra_{\overline{n}|}.$$

现在考虑任何一个包含有 k 个利息转换时期的支付时期。在此支付时期之末，在每个利息时期末所作的那些付款 R 的积累值必须等于在此时刻的付款 1 。这就是

$$Rs_{\overline{k}|} = 1.$$

再将 $R = 1/s_{\overline{k}|}$ 代入 $Ra_{\overline{n}|}$, 就得到公式 (4.1) 。也可用类似方法导出 (4.2) 式。

图 4.1 是一个阐明上述方法的时间图。

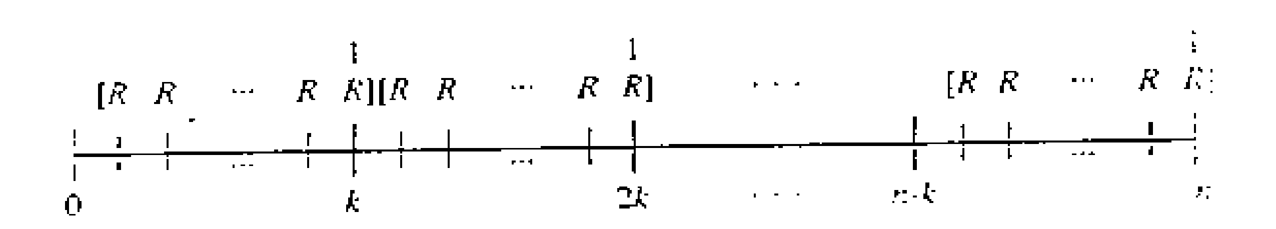


图 4.1 支付频率小于利息转换频率的延付年金的时间图

二. 初付年金

一项年金，总共有 n 个利息转换时期，而每 k 个利息转换时期之初付款 1, 则其现时值为

$$\begin{aligned} 1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{n-k} &= \frac{1 - v^n}{1 - v^k} \\ &= \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

在最后一次支付之后 k 个利息转换时期，此项年金的积累值为

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}. \tag{4.4}$$

可以类似于延付年金那样，用其他方法来导出公式 (4.3) 和 (4.4)，请读者自行完成。图 4.2 是此种情形的时间图。

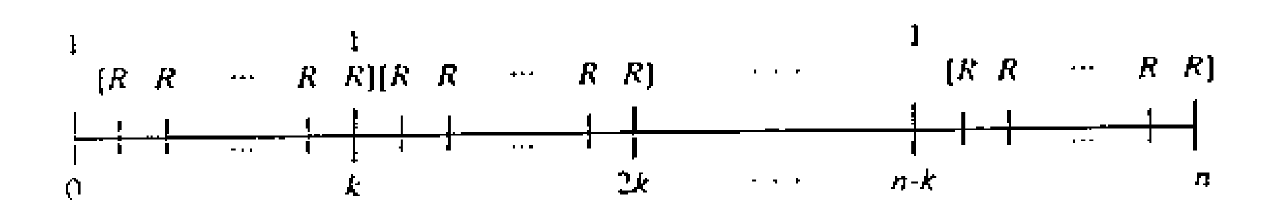


图 4.2 支付频率小于利息转换频率的初付年金的时间图

三. 其他情形

偶然也会碰到支付频率小于利息转换频率的永久年金。这样一种延付永久年金的现时值为

$$\begin{aligned} v^k + v^{2k} + \cdots &= \frac{v^k}{1 - v^k} \\ &= \frac{1}{(1+i)^k - 1} \\ &= \frac{1}{i s_{\overline{k}|}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

它也是 (4.1) 式当 n 趋于无穷大时的极限。类似地，初付永久年金的现时值为

$$\frac{1}{i a_{\overline{k}|}}. \tag{4.6}$$

第二种偶然遇到的特殊情形是要确定一系列付款在给定利息效力 δ 下的值。虽然也归入支付频率小于利息转换频率的年金一类，但此种情形并不要用象上面讨论的那种方法去处理，因为 n 和 k 都是无限的。这种情况最好这样处理：写出年金值的一个表达式，将它看作各次分别付款的现时值或积累值的和，其中用

$e^{-\delta tk}$ 代替 v^{tk}, 用 $e^{\delta tk}$ 代替 $(1+i)^{tk}$ 。这个表达式可按几何级数求和。习题中有一个这样的例子。

第三种特殊情形在实际中很少碰到，那就是支付时期并不是利息转换时期整数倍的情形 (即 $k>1$, 但 k 不是整数) 。对此最好的处理办法也是回到基本原理，也就是写出每次各别付款的现时值或积累值之和的表达式，并按几何级数求和来处理。在习题中也有一个这种类型的例子。

应该注意，从 (4.1) 到 (4.6) 的各项年金值，我们都没有给它们用单个符号表示的表达式，所有表达式都是使用在 (4.1) 到 (4.6) 式中那些常规年金符号。

最后，可以象 3.4 节中所做的那样，将上述方法推广到对支付频率小于利息转换频率的年金寻找在任何日期的年金值。例 4.4 就展示了这种方法。

例 4.4 一项年金总共有 r 次付款 1, 其中第 1 次是在第 7 年末支付，其余的每隔 3 年支付一次，年实质利率为 i, 试确定此项年金现时值，图 4.3 是此例的时间图。分别按 (1) 延付年金，(2) 初付年金表示的表达式。

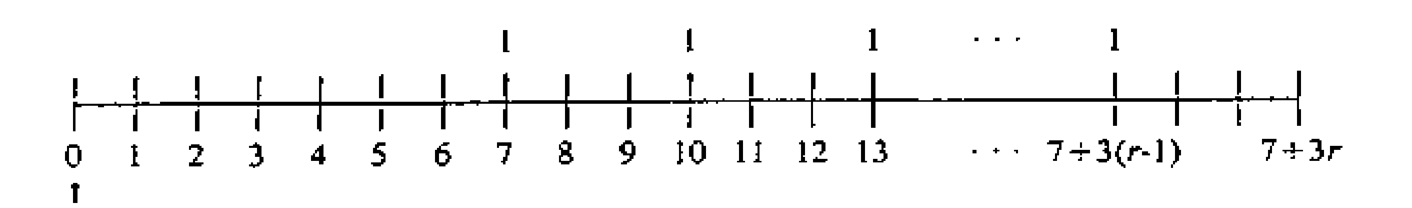


图 4.3 例 4.4 的时间图

此项年金的现时值为

$$v^{7}+v^{10}+v^{13}+\cdots+v^{3r+4}.$$

1. 几何级数求和，我们有

$$\begin{aligned}\frac{v^7-v^{3r+7}}{1-v^3} &= \frac{v^4-v^{3r+4}}{(1+i)^3-1}\\ &= \frac{(1-v^{3r+4})-(1-v^4)}{(1+i)^3-1}\\ &= \frac{a_{\overline{3r+4}|}-a_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|}}.\end{aligned}$$

注意延付年金形式以分母 $s_{\overline{3}|}$ 为特征。

2. 几何级数求和，我们有

$$\begin{aligned}\frac{v^7-v^{3r+7}}{1-v^3} &= \frac{(1-v^{3r+7})-(1-v^7)}{1-v^3}\\ &= \frac{a_{\overline{3r+7}|}-a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}}.\end{aligned}$$

注意初付年金形式以分母 $a_{\overline{3}|}$ 为特征。

经过实践，读者应能直接写下此种类型问题以延付年金或初付年金形式表示的答案，而不需要做几何级数求和。

例 4.5　用 4.3 节中建立的方法去重新处理例 4.1 。

利率是每月 1%，年金的期数是 48 个利息转换时期，每一支付时期包含 3 个利息转换时期。因为这是初付年金，积累值为

$$100\frac{s_{\overline{48}|0.01}+s_{\overline{24}|0.01}}{a_{\overline{3}|0.01}}=100\frac{61.2226+26.9735}{2.9410}=\$2999.$$

利用利息表并舍入到元为止。此答案与例 4.1 中得到的一致。

例 4.6　一笔 \$1000 的投资，用以产生每年末 \$100 的付款，时间尽可能长，并在最后一次正规付款时附加一笔较小的最后付款。如果利率为半年度转换 7%，试确定付款次数以及最后一次付款的总金额。

求值方程是

$$100\frac{a_{\overline{n}|0.035}}{s_{\overline{2}|0.035}} = 1000$$

或

$$a_{\overline{n}|0.035} = 10s_{\overline{2}|0.035} = 20.35.$$

查对利息表，有 $36 < n < 37$ 。这样，应有 18 次正规付款及一次较小的最后付款。设将最后一次正规付款时的较小附加付款记为 R 。则在第 18 年末的求值方程为

$$R + 100\frac{s_{\overline{36}|0.035}}{s_{\overline{2}|0.035}} = 1000(1.035)^{36}$$

或

$$R = 1000(3.45027) - 100\frac{70.0076}{2.0350} = \$10.09.$$

因而最后一次的总付款为 \$110.09 。

§4.4 支付频率大于利息转换频率的年金的进一步分析

本节将从代数上进一步分析支付频率大于利息转换频率的年金。在实践中这种年金比支付频率小于利息转换频率的年金更为常见。本节将分为三部分：(1) 延付年金，(2) 初付年金，及 (3) 其他情况。

一. 延付年金

设 m 为一利息转换时期内支付时期的数目， n 为年金用利息转换时期度量的时期数，而 i 为每个利息转换时期的利率。我们将假定每个利息转换时期包含整数个支付时期，这样 m 和 n 都是正整数。年金的付款次数为 mn, 它也是正整数。

若一项年金在总共 n 个利息转换时期内，每 $1/m$ 个利息转换时期之末支付 $1/m$，此项年金的现时值记为 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 。我们有

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\cdots+v^{n-\frac{1}{m}}+v^{n}\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{v^{\frac{1}{m}}-v^{n+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right] \\ &= \frac{1-v^{n}}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]} \\ &= \frac{1-v^{n}}{i^{(m)}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

此项年金在最后一次付款后即时的积累值记为 $s_{\overline{n}|}^{(m)}$，且有

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|}^{(m)} &= a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{n} \\ &= \frac{(1+i)^{n}-1}{i^{(m)}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

应将 (4.7) 和 (4.8) 式与 (3.2) 和 (3.4) 式对应地相比较。除了 (4.7) 和 (4.8) 式的分母是 $i^{(m)}$ 而不是 i 这一点以外，它们是相同的。因为 $i^{(m)}$ 是在 $1/m$ 个利息转换时期之末支付的利息的一种度量，所以在这种度量下支付利息的点与付款的点是一致的。将付款的点与分母上利息度量相联系这一性质，原先在 3.3 节中就提及过。

可以将 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 及 $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ 按 $a_{\overline{n}|}$ 及 $s_{\overline{n}|}$ 加上调节因子来写出。下列公式是 (4.7) 和 (4.8) 式的直接后果：

$$a_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|} \tag{4.9}$$

及

$$s_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{i}{i^{(m)}}s_{\overline{n}|}. \tag{4.10}$$

在使用利息表求得数值结果时常常应用 (4.9) 和 (4.10) 式。在附录 I 的利息表中有 $\frac{i}{i^{(m)}}$ 的值。这项 $\frac{i}{i^{(m)}}$ 常写作 $s_{\overline{1}|}^{(m)}$, 这与公式 (4.8) 中置 $n=1$ 一致。

二. 初付年金

一项年金在总共 n 个利息转换时期内，每 $1/m$ 个利息转换时期的开始付款 $1/m$, 其现时值记为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ 。我们有

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}}. \tag{4.11}$$

(4.11) 式的导出类似于 (4.7) 式，可留作习题。

此年金最后一次付款后 $1/m$ 个利息转换时期的积累值记为 $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$, 我们有

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n \\ &= \frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

这里也应注意付款方式与分母上利息度量之间的关系。

公式 (4.11) 与 (4.12) 的直接后果是

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{d^{(m)}}a_{\overline{n}|} \tag{4.13}$$

及

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{d^{(m)}}s_{\overline{n}|}. \tag{4.14}$$

如果在利息表中提供 $i/d^{(m)} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{m}$ 的值，则 (4.13) 与 (4.14) 式可用来求得数值结果。在附录 I 中确实有这些值，但许多利息表中不提供这些值。

然而，也可以建立另一种可用的方法。因为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ 下的每一次付款都比 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 下的付款早 $1/m$ 个利息转换时期，故有

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}}a_{\overline{n}|}^{(m)}$$

$$= \left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|}$$

$$= \left[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}\right]a_{\overline{n}|}. \tag{4.15}$$

类似地

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \left[\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}\right]s_{\overline{n}|}. \tag{4.16}$$

当利用利息表进行数值计算时，如果提供 $i/i^{(m)}$ 的值而不提供 $i/d^{(m)}$ 的值，则使用 (4.15) 和 (4.16) 式将是方便的。

可以建立不少其他有趣的恒等式，它们都包含有 $1/m$ 时期支付一次的年金。特别是，存在着类似于 (3.6) 和 (3.12) —(3.16) 的公式。这 6 个恒等式及其推导留作习题。

三. 其他情形

偶尔会碰到支付频率大于利息转换频率的永久年金。下列公式类似于 (3.20) 和 (3.21):

$$a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}} \tag{4.17}$$

及

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}. \tag{4.18}$$

第二种特殊情形在实际中很少遇到，这就是每一个利息转换时期并不包含整数个支付时期 (即 $m>1$, 但 m 不是整数), 在这种情形下，最好的办法是回复到基本原理，即写出每一各别付款的现时值或积累值的表达式，然后按几何级数求和。习题中有此种类型的例子。

在实际中应该考虑的重要的一点是对每 $1/m$ 时期付款的年金应有适当的系数。每一付款的金额为 $1/m$, 而符号中的系数为 1 。一般而言，此系数是一个利息转换时期所付的金额，而不是每次实际的付款。每个利息转换时期所付的金额常称为年金的 “

年收入”。当利息转换时期为一年 (大多数情况为如此), 这是一个适当的术语；但如果利息转换时期不是一年，就会产生混淆。有时为避免混淆，可用术语“周期收入”代替“年收入”。

最后，可以象 3.4 节中所讨论的那样，将上述方法推广到对支付频率大于利息转换频率的年金寻找在任何日期的年金值。例 4.7 展示了这种方法。

例 4.7　在 10 年期间每月支付 $400 。(1) 试确定这些付款在第一次付款前 2 年的现时值表达式，(2) 试确定最后一次付款后 3 年积累值的表达式。使用基于实质利率的符号。

(1) 答案为

$$4800v^2\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = 4800(\ddot{a}^{(12)}_{\overline{12}|} - \ddot{a}^{(12)}_{\overline{2}|}).$$

(2) 答案为

$$4800s^{(12)}_{\overline{10}|}(1+i)^3 = 4800(s^{(12)}_{\overline{13}|} - s^{(12)}_{\overline{3}|}).$$

例 4.8　用 4.4 节中的方法重新解例 4.2 。

利率为每半年 5%, 贷款的期数为 10 个利息转换时期，每一利息转换时期有 2 个支付时期。故求值方程为

$$2Ra^{(2)}_{\overline{10}|0.05} = 3000.$$

因此

$$\begin{aligned} R &= \frac{1500}{a^{(2)}_{\overline{10}|0.05}} = \frac{1500}{\frac{i}{i^{(2)}}a_{\overline{10}|0.05}} \\ &= \frac{1500}{(1.012348)(7.7217)} = \$191.89. \end{aligned}$$

此答案与例 4.2 中所得者一致。

例 4.9　一笔年金为每 6 个月付 \$1, 一直不断付下去，且第一笔付款为立即支付，问欲使此年金的现时值为 \$10, 年度实质利率应为多少？

求值方程为

$$10 = 1 + v^{0.5} + v + v^{1.5} + \cdots = \frac{1}{1 - v^{0.5}}.$$

故

$$v^{0.5} = 0.9$$

及

$$(1+i)^{0.5} = \frac{1}{0.9}.$$

这就给出

$$i = \left[\frac{1}{0.9}\right]^2 - 1 = 0.2346 \text{ 或} 23.46\%.$$

§4.5　连续年金

支付频率大于利息转换频率的年金的一种特殊情形是支付频率趋向于无限，即连续支付。虽然在实际中很难想象有这样的年金，但连续年金在理论和分析上确实是很重要的。同时，它也可以作为支付频率很高 (例如日付) 的年金的一种近似。

若有一年金连续支付 n 个利息转换时期，在每个时期内总支付量为 1, 用符号 $\overline{a}_{\overline{n}|}$ 来记其现时值。因为微分表达式 $v^t dt$ 是恰在时刻 t 支付 dt 的现时值，故有 $\overline{a}_{\overline{n}|}$ 的表示式

$$\overline{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt. \tag{4.19}$$

通过积分计算可得到一简单的表达式

$$\overline{a}_{\overline{n}|} \quad = \quad \int_0^n v^t dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{v^t}{\log_e v}\right]_0^n \\
&= \frac{1-v^n}{\delta}. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

公式 (4.20) 类似于公式 (3.2) 。而且在支付方式与表达式分母间关系方面也是一致的。

(4.20) 式也能如下得到：

$$
\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}
$$

或

$$
\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}.
$$

因而，连续年金可被视为 $1/m$ 时期支付一次的年金的极限情形。

可以将 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 按 $a_{\overline{n}|}$ 带有一调节因子来写出

$$
\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} = \bar{s}_{\overline{1}|} a_{\overline{n}|}. \qquad (4.21)
$$

$i/\delta = \bar{s}_{\overline{1}|}$ 的值很容易直接计算，且也出现在附录 I 的利息表内。

连续年金在此年金期末的积累值记为 $\bar{s}_{\overline{n}|}$ 。下列关系成立

$$
\begin{aligned}
\bar{s}_{\overline{n}|} &= \int_0^n (1+i)^t dt \qquad (4.22) \\
&= \frac{(1+i)^t}{\log_e(1+i)} \Big]_0^n \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} \qquad (4.23) \\
&= \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|} = \bar{s}_{\overline{1}|} s_{\overline{n}|} \qquad (4.24) \\
&= \lim_{m\to\infty} s_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}.
\end{aligned}
$$

为增加对连续年金的理解，可对 (4.22) 式的上限微分，然后用 t 代替 n, 给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{s}_{\overline{t}|} &= (1+i)^t \\ &= 1+\delta\bar{s}_{\overline{t}|}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

最后一式由代入 (4.23) 式而得。 (4.25) 式有一个有趣的字面解释。考虑一项投资基金，其中款项是以每个利息转换时期存 1 的速度连续存入的。基金在时刻 t 的余额为 $\bar{s}_{\overline{t}|}$ 。基金余额瞬时变化是由于两个原因。首先，新的储蓄以每个利息转换时期存入 1 的速度发生；其次，基金余额以效力 δ 赚取利息。

类似地，微分 (4.19) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{t}|} &= v^t \\ &= 1-\delta\bar{a}_{\overline{t}|}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

公式 (4.26) 也有一个字面上的解释，对此我们将在第 6 章中给出一些其他材料后再来讨论。

可以将连续年金的值严格地用利息效力 δ 来表示。此时公式 (4.20) 成为

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}, \tag{4.27}$$

而 (4.23) 则成为

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}. \tag{4.28}$$

在某种意义上，这是一种支付时期与利息转换时期相等的年金，但它在第 3 章中没有讨论过。

例 4.10　确定利息效力使 $\bar{s}_{\overline{20}|}=3\bar{s}_{\overline{10}|}$ 。

由 (4.28) 式有

$$\frac{e^{20\delta}-1}{\delta}=3\frac{e^{10\delta}-1}{\delta}$$

或

$$e^{20\delta} - 3e^{10\delta} + 2 = 0.$$

分解因式有

$$(e^{10\delta} - 2)(e^{10\delta} - 1) = 0.$$

然而 $e^{10\delta} - 1 = 0$ 意味着 $\delta = 0$, 这是一个增根。因此有

$$e^{10\delta} = 2,$$

故

$$\delta = \frac{\log_e 2}{10} = 0.0693 \text{ 或} 6.93\%.$$

§4.6 基本变额年金

至今为止，所有的年金都被认为是等额支付的，今取消这一限制并考虑具有变额支付的年金。在 4.6 节中将假设支付时期与利息转换时期为相等且一致。同在第三章中一样，我们将对两者使用同一术语“时期”。

自然，任何类型的 **变额年金** 可以这样来计算：分别对每一次付款取现时值或积累值，然后将其结果相加。有时这是一种唯一可行的方法。然而，也确实有若干种变额年金，对它们可以建立相对简单的表达式，下面就来考虑这些情况。

在本节中将讨论下述类型的变额年金：(1) 付款金额按算术级数变化，(2) 付款金额按几何级数变化，及 (3) 其他付款形式。

一. 付款金额按算术级数变化

考虑一项有 n 个时期的一般延付年金，其付款金额由 P 开始，其后每个时期增加 Q 。利率为每时期 i 。图 4.4 是此项年金的时间图。应该指出 P 必须是正的，但 Q 可以是正的，也可以是负的，只是应有 $P + (n-1)Q > 0$, 以避免出现负支付。

设 A 为此年金的现时值，则有

$$\begin{aligned} A &= Pv + (P+Q)v^2 + (p+2Q)v^3 \\ &+ \cdots + [P+(n-2)Q]v^{n-1} + [P+(n-1)Q]v^n. \end{aligned}$$

这是算术级数和几何级数的组合。它可以用代数方法求解，只要在级数中乘上共同的比率而得到

$$\begin{aligned} (1+i)A &= P + (P+Q)v + (p+2Q)v^2 + (P+3Q)v^3 \\ &+ \cdots + [P+(n-1)Q]v^{n-1}. \end{aligned}$$

今从第二方程中减去第一方程就得到

$$\begin{aligned} iA &= P + Q(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}) - Pv^n - (n-1)Qv^n \\ &= P(1-v^n) + Q(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n) - Qnv^n. \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} A &= P\frac{1-v^n}{i} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\ &= Pa_{\overline{n}|} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

积累值则为

$$Ps_{\overline{n}|} + Q\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i}. \tag{4.30}$$

因为它必然由现时值积累 n 个时期而得。

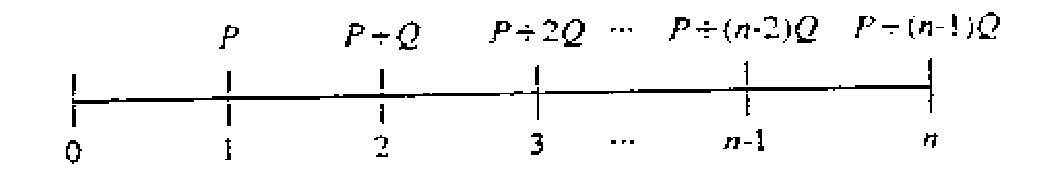


图 4.4　公式 (4.29) 和 (4.30) 的时间图

(4.29) 和 (4.30) 式可用于解任何支付按算术级数变化的问题。然而，有两种特殊情况经常出现并有特定的符号。

第一种是递增年金，其中 $P=1$ 及 $Q=1$ 。图 4.5 就是此年金的时间图。此项年金的现时值记为 $(Ia)_{\overline{n}|}$，可由 (4.29) 式得到，为

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\
&= \frac{1 - v^n + a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n+1}|} - (n+1)v^n}{i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

此年金的积累值 $(Is)_{\overline{n}|}$ 为

$$
\begin{aligned}
(Is)_{\overline{n}|} &= (Ia)_{\overline{n}|}(1+i)^n \\
&= \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{i} = \frac{s_{\overline{n+1}|} - (n+1)}{i}.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

公式 (4.31) 也可由另一种方法导出，那就是把递增年金看作为一系列等额延期年金的和。应用 (3.17) 式，我们有

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t a_{\overline{n-t}|} \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot \frac{1 - v^{n-t}}{i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

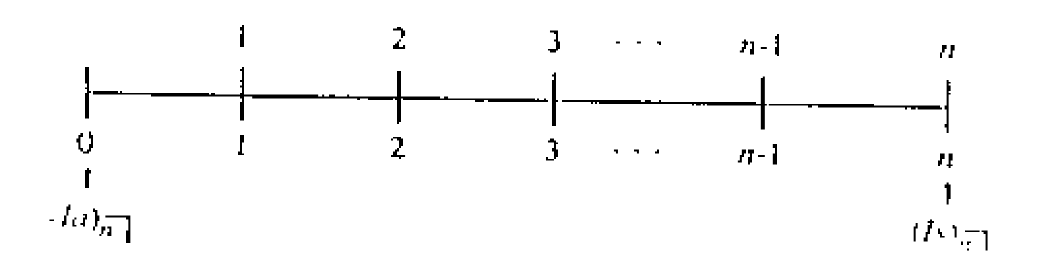


图 4.5　递增年金时间图

上述推导不但简洁，而且还提供了对递增年金本质的深入理解。

第二种是递减年金，其中 $P = n$ 而 $Q = -1$ 。图 4.6 是这类年金的时间图。此项年金的现时值记为 $(Da)_{\overline{n}|}$，可由 (4.29) 式得到，为

$$\begin{aligned}(Da)_{\overline{n}|} &= na_{\overline{n}|} - \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\ &= \frac{n - nv^n - a_{\overline{n}|} + nv^n}{i} \\ &= \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

此年金的积累值 $(Ds)_{\overline{n}|}$ 为

$$\begin{aligned}(Ds)_{\overline{n}|} &= (Da)_{\overline{n}|}(1+i)^n \\ &= \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}}{i}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.33) 式亦可由另一种方法导出，就是把递减年金看作一系列等额年金的和。用此种方法可得

$$(Da)_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} a_{\overline{t}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1-v^t}{i}$$

$$= \frac{n-a_{\overline{n}|}}{i}. \qquad (4.33)$$

此推导也很简洁，而且提供了递减年金本质的深入理解。

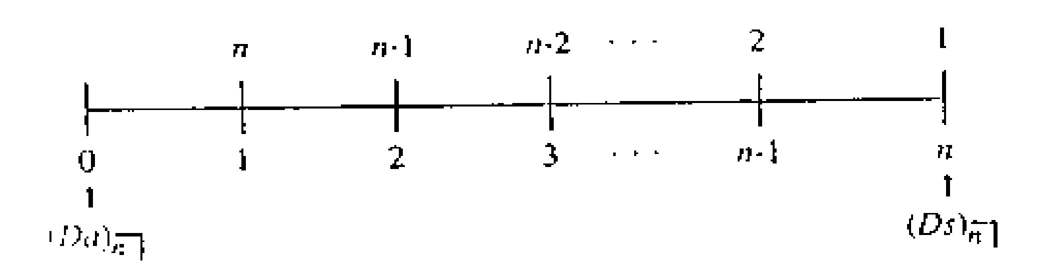


图 4.6 递减年金时间图

上面引进的这些公式都是针对延付年金的。但是，我们可以利用以前提到过的支付方式与年金值表达式分母之间的关系，来导出对初付年金的表达式。在上述任一公式的分母中将 i 换成 d，就得到初付年金的值。

也可以有变额永久年金。在 (4.29) 式中取极限 n 趋于无限，就可得到永久年金的一般形式为

$$\frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}. \qquad (4.35)$$

这是因为

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} \text{ 及 } \lim_{n\to\infty} nv^n = 0.$$

注意 P 与 Q 必须均为正，以避免负的支付。

确定变额年金表达式的另一种方法是利用以下三个量：

$$F_n \;=\; v^n \qquad (4.36)$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{在第 } n \text{ 时期末付款 1 的现时值。} \\
G_n &= \frac{v^n}{d} \qquad (4.37) \\
&= \text{一项每时期付 1 的等额永久年金的现时值,} \\
&\quad \text{其中第一次支付是在第 } n \text{ 个时期之末。} \\
H_n &= \frac{v^n}{d^2} \qquad (4.38) \\
&= \text{一项 } 1,2,3,\cdots \text{ 的递增永久年金的现时值,} \\
&\quad \text{第一次支付在第 } n \text{ 个时期之末。}
\end{aligned}
$$

这些符号对于建立变额年金的表达式很有用。只要适当描述付款的形式，就可立即写出年金的表达式。这由后面的例子就可看出。

对这一小节建立的公式可以给出有趣的字面解释。例如，把 (4.31) 式写成

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = i(Ia)_{\overline{n}|} + nv^n.$$

等式左边表示 n 个时期中每时期初投资 1 的现时值。右边两项则可分别解释为赚得利息的现时值和返回的投资本金的现时值。

二. 付款金额按几何级数变化

付款金额按几何级数变化的年金很容易处理，只要直接将年金值表示为一个级数，其中每次付款额乘上相应的现时值或积累值。因为付款额与现时值或积累值均为几何级数，故年金值的级数形成一新的几何级数。

例如，考虑一项 n 个时期的延付年金，其第一次付款额为 1 而其后各次则按公比为 $1+k$ 的几何级数增长。此年金的现时值为

$$v + v^2(1+k) + \cdots + v^n(1+k)^{n-1}.$$

但这是几何级数，其和为

$$v\left[\frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]}\right]=\frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k}. \tag{4.39}$$

这一表达式可以直接计算。偶然 $\frac{1+k}{1+i}$ 或 $\frac{1+i}{1+k}$ 会等于 $1+j$，其中 j 正好是利息表中的某个利率，这时可以用利息表。如果 $k=i$，(4.39) 式无意义，但此时从原始级数中显然可知现时值为 nv 。

如果 $0<\frac{1+k}{1+i}<1$，则永久年金存在现时值，因为此时几何级数为收敛。如果 $\frac{1+k}{1+i}\geq 1$，则几何级数发散，永久年金不存在现时值。

三. 其他付款形式

在实际应用中求变额年金的值时，如果付款是按其他形式，那最好是从基本原理出发来求值。可以对每次付款求出其现时值或积累值，然后相加求和。在附录Ⅲ中包含对某种变额年金的进一步分析，此种年金的付款额按 $n>1$ 阶的多项式变化。在 9.9 节中需要用到这些结果。

读者应注意将“变额年金”与“可变年金”相区别。可变年金是指一种生命年金，其中的付款额是按照在某个基础投资帐户(常常是投资于普通股)的投资经历来变化的。可变年金已超出本书范围，在此不作进一步的考察。

例 4.11 利用包含函数 F_n, G_n 和 H_n 的方法来导出：(1) 公式 (4.31), (2) 公式 (4.33) 。

1. 由 $(Ia)_{\overline{n}|}$ 表示的付款可以写为

$$H_1-H_{n+1}-n\cdot G_{n+1}.$$

由代入可得

$$\begin{aligned}\frac{v}{d^2}-\frac{v^{n+1}}{d^2}-n\frac{v^{n+1}}{d} &= \frac{1}{di}-\frac{v^n}{di}-\frac{nv^n}{i}\\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}.\end{aligned}$$

2. 由 $(Da)_{\overline{n}|}$ 表示的付款可写为

$$n \cdot G_1 - (H_2 - H_{n+2}).$$

由代入可得

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{v}{d} - \left[\frac{v^2}{d^2} - \frac{v^{n+2}}{d^2}\right] &= \frac{n}{i} - \frac{1}{i^2}(1 - v^n) \\ &= \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}. \end{aligned}$$

例 4.12　确定其逐次付款额为 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 的延付永久年金的现时值，设实质利率为 5% 。

一个适当的符号是 $(Ia)_{\overline{\infty}|}$ 。在公式 (4.35) 中代入 $P = 1$ 及 $Q = 1$, 就得到

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} = \frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.0025} = 420.$$

换一种说法，有

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = H_1 = \frac{v}{d^2} = \frac{1+i}{i^2} = \frac{1.05}{0.0025} = 420.$$

例 4.13　有一项延付年金，其付款额从 1 开始每年增加 1 直至 n, 然后每年减少 1 直至 1, 试求其现时值。

现时值为

$$\begin{aligned} & (Ia)_{\overline{n}|} + v^n (Da)_{\overline{n-1}|} \\ = & \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} + v^n \frac{(n-1) - a_{\overline{n-1}|}}{i} \\ = & \frac{1}{i}\left[a_{\overline{n-1}|} + 1 - nv^n + nv^n - v^n - v^n a_{\overline{n-1}|}\right] \\ = & \frac{1}{i}\left[a_{\overline{n-1}|}(1 - v^n) + (1 - v^n)\right] \\ = & \frac{1}{i}(1 - v^n)(a_{\overline{n-1}|} + 1) \\ = & a_{\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}. \end{aligned}$$

也可以将付款的现时值表示为

$$\begin{aligned}(H_1 - H_{n+1}) - (H_{n+1} - H_{2n+1}) &= H_1 - 2H_{n+1} + H_{2n+1} \\ &= \frac{v - 2v^{n+1} + v^{2n+1}}{d^2} \\ &= \frac{1 - 2v^n + v^{2n}}{id} \\ &= \frac{(1 - v^n)^2}{id} \\ &= a_{\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}\end{aligned}$$

作为练习，请读者对此答案作出字面解释。

例 4.14　有一项延付年金，其付款额从 1 开始，以后每次增加 1 直至达到 10，然后保留在此水平直到总共付款 25 次为止，试求其现时值。

一项增长型延付年金，其中仅在头 m 个时期 $(0 < m < n)$ 有增长，其符号为

$$(I_{\overline{m}|}a)_{\overline{n}|}.$$

这样，此例中年金的现时值可写为 $(I_{\overline{10}|}a)_{\overline{25}|}$ 。读者可以验证，以下这些都是此项年金现时值的有效表达式：

- $(Ia)_{\overline{10}|} + 10v^{10}a_{\overline{15}|}$
- $(Ia)_{\overline{25}|} - v^{10}(Ia)_{\overline{15}|}$
- $10a_{\overline{25}|} - (Da)_{\overline{9}|}$
- $\sum_{t=0}^{9} v^t a_{\overline{25-t}|}$
- $H_1 - H_{11} - 10H_{26}$ 。

例 4.15　一项年金提供 20 笔年度付款，一年以后的第一次付款为 \$1000，付款额按每年比上一年多 4% 的形式增加。试求此项年金按年度实质利率为 7% 的现时值。

由 (4.39) 式有

$$1000\frac{1-\left[\frac{1.04}{1.07}\right]^{20}}{0.07-0.04}=\$14459,$$

算到元为止。

§4.7 一般变额年金

在 4.6 节中考虑的变额年金，均假设付款时期与利息转换时期为相等且一致。在 4.7 节中将取消这一限制。事实上，在实际生活中经常发生支付频率大于或小于利息转换频率的变额年金。

我们将把递增年金 $(Ia)_{\overline{n}|}$ 推广到利息转换频率大于或小于支付频率的情况。付款额按算术级数变化的其他年金可类似处理。

首先考虑支付频率小于利息转换频率的情形。设 k 为每个支付时期内包含的利息转换时期的个数， n 为按利息转换时期度量的年金的期数， i 为每利息转换时期的利率。支付次数为 n/k, 它是整数。

设 A 为广义递增年金的现时值，将有

$$A=v^k+2v^{2k}+\cdots+\left[\frac{n}{k}-1\right]v^{n-k}+\frac{n}{k}v^n$$

及

$$(1+i)^kA=1+2v^k+\cdots+\left[\frac{n}{k}-1\right]v^{n-2k}+\frac{n}{k}v^{n-k}.$$

从第二个方程中减去第一个方程，得

$$A[(1+i)^k-1]=1+v^k+v^{2k}+\cdots+v^{n-k}-\frac{n}{k}v^n.$$

它可以表示为

$$A=\frac{\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}-\frac{n}{k}v^n}{is_{\overline{k}|}}. \tag{4.40}$$

(4.40) 式是 (4.31) 式的推广形式，读者应注意其相似性。

其次考虑支付频率大于利息转换频率的情形。这里又根据在一个利息转换时期内支付率为常数还是变量，而有两种不同的结果。

首先看在一个利息转换时期内支付率为常数的情形，也就是在一个利息转换时期内付款额只增加一次。我们可以利用付款方式与分母上利息度量的关系，以得到下列对 (4.31) 的推广形式

$$(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}}. \tag{4.41}$$

(4.41) 式给出了一个含 n 个时期，每 $1/m$ 个时期付款 1 次的延付年金的现时值，其中第一时期中每次付款为 $1/m$, 第二时期中每次付款为 $2/m$, 如此等等，直到第 n 个时期每次付款为 n/m 。

其次考虑支付率随支付时期而变化的情形。假设有一项增长年金，它在一个利息转换时期的第一个 $1/m$ 时期之末按每利息转换时期 $1/m$ 的支付率付款；第二个 $1/m$ 时期之末按每利息转换时期 $2/m$ 的支付率付款，如此等等。这样第一次付款将是 $1/m^2$, 第二次付款为 $2/m^2$, 如此等等。将这种年金的现时值记为 $(I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}$, 则有

$$\begin{aligned}(I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m^2}\left[v^{\frac{1}{m}} + 2v^{\frac{2}{m}} + \cdots + nmv^{\frac{nm}{m}}\right] \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{i^{(m)}}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

此公式的推导留作习题。

偶然会碰到某些年金，其付款额按几何级数变化，而支付时期与利息转换时期是不相等的。但这并没有什么新的困难。它们可以这样来处理：将年金值表示为每次付款的现时值或积累值之和。这一和式是一个可以直接计算的几何级数，此种方法见例 4.17 。

例 4.16　有一项永久年金，在第 3 年末付款 1, 第 6 年末付款 2, 第 9 年末付款 3, $\cdots$, 试确定其现时值。

将此永久年金的现时值记为 A, 则有

$$A = v^3 + 2v^6 + 3v^9 + \cdots$$

及

$$v^3 A = v^6 + 2v^9 + \cdots$$

从第一方程减去第二方程，

$$\begin{aligned} A(1-v^3) &= v^3 + v^6 + v^9 + \cdots = \frac{v^3}{1-v^3} \\ A &= \frac{v^3}{(1-v^3)^2}. \end{aligned}$$

例 4.17　有一项年金，在 5 年内的每半年之初付一笔款。第一次付款为 \$2000, 以后每次付款额为其前一次的 98%, 利率为季度转换 10%, 求此年金在第 10 年末的积累值。

$$\begin{aligned} &2000[(1.025)^{40} + (0.98)(1.025)^{38} + (0.98)^2(1.025)^{36} \\ &+ \cdots + (0.98)^9(1.025)^{22}] \\ &= 2000\frac{(1.025)^{40} - (0.98)^{10}(1.025)^{20}}{1-(0.98)(1.025)^{-2}} \\ &= \$40052, \end{aligned}$$

计算到元为止。

§4.8　连续变额年金

我们将考虑的最后一种变额年金是那种支付率连续变化的年金。讨论这种年金主要由于理论上的兴趣。

考虑一项 n 个利息转换时期的递增年金，它是按照在时刻 t 支付率为每时期 t 而连续支付的。此种年金的现时值记为 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$，其表示式为

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n tv^t dt. \tag{4.43}$$

这是因为微分表达式 $tv^t dt$ 是恰在时刻 t 支付金额 tdt 的现时值。

由分部积分可得到简化的表达式

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} &= \int_0^n tv^t dt \\
&= \left.\frac{tv^t}{\log_e v}\right]_0^n - \int_0^n \frac{v^t}{\log_e v} dt \\
&= \left.\frac{tv^t}{\log_e v}\right]_0^n - \left.\frac{v^t}{(\log_e v)^2}\right]_0^n \\
&= -\frac{nv^n}{\delta} - \frac{v^n}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \\
&= \frac{1 - v^n}{\delta^2} - \frac{nv^n}{\delta} \\
&= \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

应当注意 (4.44) 式也可由 (4.42) 式导出如下：

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} (I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{i^{(m)}} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta}.$$

一般而言，如果在时刻 t 的付款金额为 $f(t)dt$，则 n 时期的连续变额年金现时值的表达式应为

$$\int_0^n f(t)v^t dt. \tag{4.45}$$

一种更为一般的连续变额年金是这样的：它不仅支付是连续的且连续发生变化，而且利息效力也是连续变化的。在此情形下，

(4.45) 式的推广形式为

$$\int_0^n f(t)e^{-\int_0^t \delta_r dr}dt. \tag{4.46}$$

例 4.18　有一项连续递增年金，为期 n 年，利息效力为 δ，在时刻 t 的支付率为每年 t^2，试确定其现时值的表达式。

由分部积分可得解答为：

$$\begin{aligned}
\int_0^n t^2 e^{-\delta t}dt &= -\frac{t^2}{\delta}e^{-\delta t}\Big]_0^n + \frac{2}{\delta}\int_0^n te^{-\delta t}dt \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \frac{2t}{\delta^2}e^{-\delta t}\Big]_0^n + \frac{2}{\delta^2}\int_0^n e^{-\delta t}dt \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \frac{2n}{\delta^2}e^{-\delta n} + \frac{2}{\delta^3}e^{-\delta t}\Big]_0^n \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \frac{2n}{\delta^2}e^{-\delta n} - \frac{2}{\delta^3}e^{-\delta n} + \frac{2}{\delta^3} \\
&= \frac{2}{\delta^3} - e^{-\delta n}\left[\frac{n^2}{\delta} + \frac{2n}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3}\right].
\end{aligned}$$

§4.9　总　结

表 4.1 综合了不同支付时期和不同利息转换时期等额年金现时值的表达式。此例的年金为 10 年内每年支付 60，年利率 12% 。

习　题

§4.2　支付频率不同于利息转换频率的年金

1. 一项年金每间隔两年付款 $2000，共付 8 次。若名义利率为每半年度转换 7%，试求第一次付款后 18 年末的积累值。答案算到元为止。

表 4.1　第四章内等额年金关系总结

利息转换时期	支付时期			
	年度	季度	月度	连续
年度	$60a_{\overline{10}\|0.12}$	$60a^{(4)}_{\overline{10}\|0.12}$	$60a^{(12)}_{\overline{10}\|0.12}$	$60\bar{a}_{\overline{10}\|0.12}$
季度	$60\frac{a_{\overline{40}\|0.03}}{s_{\overline{4}\|0.03}}$	$15a_{\overline{40}\|0.03}$	$15a^{(3)}_{\overline{40}\|0.03}$	$15\bar{a}_{\overline{40}\|0.03}$
月度	$60\frac{a_{\overline{120}\|0.01}}{s_{\overline{12}\|0.01}}$	$15\frac{a_{\overline{120}\|0.01}}{s_{\overline{3}\|0.01}}$	$5a_{\overline{120}\|0.01}$	$5\bar{a}_{\overline{120}\|0.01}$
连续	$60\frac{1-e^{-1.2}}{e^{0.12}-1}$	$15\frac{1-e^{-1.2}}{e^{0.03}-1}$	$5\frac{1-e^{-1.2}}{e^{0.01}-1}$	$60\frac{1-e^{-1.2}}{0.12}$

2. 有一项 10 年期的年金，它在头 5 年内每季度之初付款 \$400, 以后增加到每季度 \$600 。年实质利率为 12%, 试确定此年金的现时值，算到元为止。

3. 在 8 年中每隔一年之初向一基金存入 \$100, 如果在第 8 年之末基金余额为 \$520, 试求此基金的单利利率。

§4.3　支付频率小于利息转换频率的年金的进一步分析

4. 用 4.3 节中的方法重做习题 1 。

5. 一项年金在 12 年内每 4 个月付款 \$200, 试按照假设月利率的函数来给出它在第一次付款前 3 年的现时值。

a) 表示为延付年金。

b) 表示为初付年金。

6. 证明若在时刻 7, 11, 15, 19, 23 和 27 各付款 1, 则在时刻 0 的现时值为

$$\frac{a_{\overline{28}|} - a_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|} + a_{\overline{1}|}}.$$

7. 有一项每年年底付 \$750 的永久年金和一项每 20 年之末付 \$750 的永久年金，被一项在 30 年中每年末付 R 的年金所代

替。如果 $i^{(2)}=0.04$, 证明

$$R=37500\left[\frac{1}{s_{\overline{2}|}}+\frac{v^{40}}{a_{\overline{40}|}}\right]\frac{s_{\overline{2}|}}{a_{\overline{60}|}}.$$

其中所有函数均按 2% 利息计算。

8. 有一项每年付 \$600 的初付年金，它每半年付一次，共付 10 年，如果 $d^{(12)}=0.09$, 试确定现时值的表达式。

9. 一项每 3 年之末付 1 的永久年金，其现时值为 125/91, 求 i。

10. 一项年金每季度付 \$100, 共付 5 年，如果 $\delta=0.08$, 试确定首次付款前夕的现时值。

11. 某项永久年金每年之初付 1, 其现时值为 20 。如果此项年金被另一项每 2 年之初付 R 的永久年金所取代，倘若要求此两项永久年金之值相等，求 R 。

12. 某项年金每 4 个月之初付 1, 共付 12 年，假如给出 3 个月期的利率，试确定其现时值的表达式。

§4.4 支付频率大于利息转换频率的年金的进一步分析

13. 用 4.4 节中建立的方法重做习题 2 。

14. 推导公式 (4.11) 。

15. 推导下列类似于 (3.6) 和 (3.12) 的公式：

a) $\frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(m)}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}^{(m)}}+i^{(m)}$ 。

b) $\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}}+d^{(m)}$ 。

16. 推导下列类似于 (3.13) 与 (3.14) 的公式：

a) $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{1/m}$ 。

b) $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}=s_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{1/m}$ 。

17. 推导下列类似于 (3.15) 与 (3.16) 的公式：

a) $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=1/m+a_{\overline{n-1/m}|}^{(m)}$ 。

b) $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}=s_{\overline{n+1/m}|}^{(m)}-1/m$ 。

18. 用 $a_{\overline{n}|}^{(2)}$ 与某个调节因子来表示 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(12)}$ 。

19. a) 证明 $a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} v^{t/m}\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 。

b) 按字面解释 a) 中得到的结果。

20. 用一笔 \$10000 的款项，去购买一项延期初付永久年金，它无休止地每 6 个月付款 \$500 。试确定推迟时期用 d 的函数来表示的表达式。

21. 如果 $3a_{\overline{n}|}^{(2)} = 2a_{\overline{2n}|}^{(2)} = 45s_{\overline{1}|}^{(2)}$, 试决定 i 。

22. 有一项年金在 12 年内每 3 个月之初付款 1, 假设利率是按每 4 个月时期计算的，试找出该项年金现时值的表达式。

§4.5 连续年金

23. 试确定 t 的值 $(0 < t < 1)$, 使在时刻 t 付款 1 等价于将 1 在时刻 0 与 1 之间连续支付。

24. 从代数上和字面上证明 $a_{\overline{n}|} < a_{\overline{n}|}^{(m)} < \bar{a}_{\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} < \ddot{a}_{\overline{n}|}$, 其中 $m > 1$ 。

25. 如果 $\delta_t = \frac{1}{1+t}$, 找出 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 的表达式。

26. 有一笔 \$40000 的基金，它是按 4% 年度连续转换来积累的。假使该基金的款项按年度 \$2400 的比率连续撤回，问此基金可持续多长时间。

27. 若 $\bar{a}_{\overline{n}|} = 4, \bar{s}_{\overline{n}|} = 12$, 求 δ 。

28. 证明 $\frac{d}{dn}a_{\overline{n}|} = v^n/\bar{s}_{\overline{1}|}$

§4.6 基本变额年金

29. 对例 4,13 得到的结果给出字面解释。

30. 化简 $\sum_{t=1}^{20}(t+5)v^t$ 。

31. 利用时间图，从代数上证明 $(Ia)_{\overline{n}|}$ 和 $(Da)_{\overline{n}|}$ 之间的下列关系：

$$(Da)_{\overline{n}|} = (n+1)a_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|}.$$

32. 一项年金按下列形式付款：第 5 年末付 10, 第 6 年末付

9, 如此每年减少 1 直至无钱可付。证明其现时值为

$$\frac{10 - a_{\overline{14}|} + a_{\overline{4}|}(1 - 10i)}{i}.$$

33. 一项永久年金第 1 年末付 1、第 2 年末付 2, 这样增加下去直到第 n 年末付 n, 然后永远维持每年付 n, 试确定此项年金的现时值。

34. 一项延付永久年金第 n 年付 $2n-1$, 如果第 6 次和第 7 次付款的现时值相等，确定此项年金的现时值。

35. 一项永久年金每年付 1, 第一次付款在第 2 年之末，此年金现时值为 X; 另一项永久年金有一系列年度付款 $1, 2, 3, \cdots$, 其第一次付款是在第 3 年之末，现时值为 $20X$, 求 d 。

36. 一项延付年金的半年度付款为 $800, 750, 700, \cdots, 350$, 而 $i^{(2)} = .16$ 。若 $a_{\overline{10}|0.08} = A$, 试确定此年金现时值由 A 表示的表达式。

37. 每年年初存一次款到一项基金，共存 10 年。头五次储蓄为每次 \$1000, 以后则每年递增 5% 。若基金的实质利率为 8%, 试决定第 10 年末的积累值，算到元为止。

38. 有一项 20 年期的年金，其年度付款形式为：立即付 \$600, 随后每年付款比上一年增加 5%, 若年度的实质利率为 10.25%, 求此年金的现时值，算到元为止。

§4.7　一般变额年金

39. 推导公式 (4.42) 。

40. a) 确定 $(Ia)_{\overline{2}|}^{(12)}$ 中付款的和。

b) 确定 $(I^{(12)}a)_{\overline{2}|}^{(12)}$ 中付款的和。

41. 证明 $(I^{(m)}a)_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{m(i^{(m)} - d^{(m)})}$ 。

42. 有一项永久年金，其第 5 年和第 6 年末的付款额为 1, 第 7 和第 8 年末的付款额为 2, 第 9 和第 10 年末的付款额为 3, 如

此等等，试证明其现时值为

$$\frac{v^4}{i-vd}.$$

43. 一项永久年金在每 4 年之末付款。第一次付款额为 1，以后每次付款额比前一次多 5，并且知道 $v^4=0.75$，计算此项年金的现时值。

44. 一项 10 年期年金按以下时间表付款：

每年 1 月 1 日 $\cdots$100
每年 4 月 1 日 $\cdots$200
每年 7 月 1 日 $\cdots$300
每年 10 月 1 日 $\cdots$400

证明此项年金恰在第一次付款前的 1 月 1 日的现时值为

$$1600\ddot{a}_{\overline{10}|}(I^{(4)}\ddot{a})^{(4)}_{\overline{1}|}.$$

45. 一项永久年金从今日开始每 6 个月付一次款。第一次付款额为 1，而以后每次均比前次增加 3%。若年度实质利率为 8%，确定此项年金的现时值。

§4.8　连续变额年金

46. 找出对 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{10}|}$ 后半期付款额总和与前半期付款额总和的比值。

47. 若 $\delta=0.08$，计算 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{\infty}|}$。

48. 有一项连续永久年金，它在时刻 t 的付款 (按时期) 比率为 $(1+k)^t$。年度实质利率为 i，而 $0<k<i$，确定此项永久年金的现时值。

49. a) 确定 $(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|}$ 的积分表达式。

b) 对 $(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|}$ 找出一个不包含积分的表达式。

50. 一项永久年金按时刻 t 年率 $1+t^2$ 连续付款，若 $\delta=0.05$，确定其现时值。

51. 一项推迟一年的延期变额年金共付款 13 年。在时刻 t 付款的年度比率为 t^2-1, 而利息效力为 $(1+t)^{-1}$ 。试确定此年金的现时值。

杂题

52. a) (1) 证明 $\frac{d}{di}a_{\overline{n}|}=-v(Ia)_{\overline{n}|}$,

(2) 确定 $\frac{d}{di}a_{\overline{n}|}$ 在 $i=0$ 的值。

b) (1) 证明 $\frac{d}{di}\bar{a}_{\overline{n}|}=-v(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$,

(2) 确定 $\frac{d}{di}\bar{a}_{\overline{n}|}$ 在 $i=0$ 的值。

53. a) 证明 $\frac{i}{i^{(m)}}\doteq\frac{1}{1-\frac{m-1}{2m}i}\doteq1+\frac{m-1}{2m}i$,

b) 导出下列近似等式:

$$a_{\overline{n}|}^{(m)}\doteq a_{\overline{n}|}+\frac{m-1}{2m}(1-v^n).$$

54. 对于给定的 n, 已知 $\bar{a}_{\overline{n}|}=n-4$ 及 $\delta=10\%$, 求 $\int_0^n\bar{a}_{\overline{t}|}dt$ 。

55. 找出

a) $\sum\limits_{t=1}^{n}(Ia)_{\overline{t}|}$ 的表达式,

b) $\sum\limits_{t=1}^{n}(Da)_{\overline{t}|}$ 的表达式。

56. 一户家庭打算提供一项年金, 以每月末支付 \$100 给他们刚进大学的女儿。此项年金在 4 年内每年仅支付 9 个月。试证明在第一次付款前 1 个月的现时值为

$$1200\ddot{a}_{\overline{4}|}a_{\overline{9/12}|}^{(12)}.$$

57. 证明

$$\sum_{r=1}^{h}(a_{\overline{rk}|}+s_{\overline{rk}|})=\frac{1}{i}\left[\frac{s_{\overline{hk}|}}{a_{\overline{k}|}}-\frac{a_{\overline{hk}|}}{s_{\overline{k}|}}\right].$$

58. 今有两项永久年金。第一项在每年年末有等额付款 p, 第二项付款则是按 $q,2q,3q,\cdots$ 这样增加的。试决定利率以使这两项年金现时值之差为

a) 零。

b) 最大。

59. 墙墩插入沙土中能维持 9 年，价格为 \$2; 墙墩插入混凝土中能维持 15 年，价格为 \$2+X 。这些墙墩需用 35 年，证明 X 的平衡值 (即使得顾客购买两种类型的墙墩实际无差别的那个 X 值) 为

$$2\left[\frac{a_{\overline{36}|}a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{9}|}a_{\overline{45}|}}-1\right].$$

60. 若 $\bar{a}_{\overline{n}|}=a$ 及 $\bar{a}_{\overline{2n}|}=b$, 试用 a 和 b 表示 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$ 。

第五章　收益率

§5.1　引　言

在第五章中将对前面几章中得到的结果作出重要的扩展。这些扩展包含了在实际金融计算中广泛应用的概念和方法。

首先要建立贴现资金流分析方法和收益率的概念，然后考虑收益率的唯一性。始终强调使用这些手段作为作出金融决策的工具。

我们将建立和比较对投资基金中收回的利息进行度量的不同方法，并探索在再投资利率不同于原始投资时通行利率的情况下所产生的后果。还将建立一种推广，使变利率既是原始投资日期的函数，又是从投资以来经过时间的函数。最后，对某种复杂的金融业务考虑了更一般的借贷模型。

读者将会发现，与前几章相比，本章给出的一系列重要结果将利息理论用到了更为复杂的“现实世界”的课题中去。第五章也把利息理论的应用从单纯借贷业务拓展到了更广大的商业和金融业务领域。

必须注意，本书中基本上忽略了税的影响。象本书中考虑的那些商业和金融业务，它们与税的关系有大有小，随业务性质及政治管辖区域而定。无论如何，在利息理论的实际应用中税的考虑是很重要的。常常必须知道你所进行的包含利息的特定金融计算是基于“税前”还是“税后”。例如，假定利息收入是要付税的，则“税后”利率将明显地低于“税前”利率。然而，本书所包含的基本原理可应用于任一种情况的计算。

另一个可能对本书讨论的金融问题有重要影响的因素是对损

耗的处理，有些利率已扣除了损耗，有些则不是。在后一种情况下，投资者的净收入将需扣去所承担的损耗金额。损耗的一个例子是佣金和保障买卖的其他费用。

§5.2　贴现资金流分析

在第三章和第四章中，我们曾分析了某些类型由规则的系列付款所组成的年金的现时值。这一方法可推广到任何类型的付款，并称为贴现资金流分析。

考虑下列情形：一位投资者在时刻 $0, 1, 2, \cdots, n$ 对一项投资事业存入或投入 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 。为方便起见，假设这些时间是等间隔的。如果 $C_t > 0$, 则在时刻 t 对投资事业有一个净资金输入流，而如果 $C_t < 0$, 则在时刻 t 对投资事业有一个净资金输出流。

有时觉得在分析一项金融业务时，用从投资中抽回或返回而不是用存入或投入更为方便。倘若如此，可记时刻 $0, 1, 2, \cdots, n$ 的返回为 $R_0, R_1, R_2, \cdots, R_n$ 。显然投入与返回其实是等同的概念，只是从一项业务的相反方面去看而已。故有

$$R_t = -C_t \text{ 对} t = 0, 1, 2, \cdot, n. \tag{5.1}$$

虽然并不一定需要象这样分别定义 C_t 和 R_t, 我们会发现在本章中建立某些公式时同时提供这两种符号会比较方便。

可能发生在同一时刻既存在投入又存在返回的情形。此时两者将相互抵消。例如，假如在时刻 5 同时有 \$5000 的投入和 \$1000 的返回，则 $C_5 = \$4000$, 而 $R_5 = -\$4000$ 。

我们已经选择时间周期使投资从 $t = 0$ 开始到 $t = n$ 结束。这样，如果一项投资在此期间是正向的，则有 $C_0 > 0$ ($R_0 < 0$) 及 $C_n < 0$ ($R_0 > 0$) 。然而 $C_t = -R_t$ 对于 $t = 1, 2, \cdots, n-1$ 既可以是正的，也可以是负的，或者为零。

让我们用一个例子来说明这些定义。考虑一项 10 年期的投资项目。投资者在第一年之初投入 \$10000, 第 2 年之初投入 \$5000, 以后余下每年之初承担 \$1000 的维持费。这一项目预期在最后 5 年的每年之末提供投资回报，从 \$8000 开始，以后每年增加 \$1000 。

表 5.1 总结了这一投资项目的资金流。最后一列包含了 R_t 的值以展示从投资中的返回。然而，只要调整一下也可给出 C_t 的值。

表 5.1　5.2 节中展示投资项目的资金流

年	投入	返回	R_t
0	10000	0	−10000
1	5000	0	−5000
2	1000	0	−1000
3	1000	0	−1000
4	1000	0	−1000
5	1000	0	−1000
6	1000	8000	7000
7	1000	9000	8000
8	1000	10000	9000
9	1000	11000	10000
10	0	12000	12000
总计	23000	50000	27000

现将此问题推广到一般的情形。假设每个时期的利率为 i, 则按利率 i 的投资返回的净现时值由贴现资金流方法可记为 $P(i)$, 它由下式给出

$$P(i) = \sum_{t=0}^{n} v^t R_t. \tag{5.2}$$

$P(i)$ 的值可以是正的，也可以是负的，依赖于 i 。对于表 5.1 中展示的投资项目来说， $P(i)$ 对于“低”的 i 值将是正的，而对“高”的 i 值将是负的。事实上，当现时值是按“低”的利率计算时，最后几年的正的净返回将超过头几年负的净回收；而当按“高”的利率计算时情况就相反。

(5.2) 式的一个非常重要的特殊情形是 $P(i)=0$, 即

$$P(i)=\sum_{t=0}^{n} v^t R_t = 0. \tag{5.3}$$

满足 (5.3) 的利率 i 就称为此项投资的“收益率”。用文字来叙述就是

收益率是这样的利率，按此利率投资返回的现时值等于投资投入的现时值。

在一些商业和金融文献中，收益率常被称为内返回率。术语“收益率”和“内返回率”可以互相替换使用。

收益率其实并不是一种完全新的概念，我们在前面已遇到过，在第二，三，四章中的未知利率问题可以看作收益率问题。例如，在例 3.8 中我们实际上是证明了投资 \$16000 而在 5 年内每季度之末返回 \$1000 的收益率是每季度 2.22623%, 或季度转换名义利率 8.9049% 。

在本节中至今为止我们采用的是从对投资者 (即贷款人) 有利出发的观点。然而，假如我们处理的是一个两方业务，则也很容易转为采用从借方利益出发的观点。假如这样做的话， C_t 和 R_t 的值将改变符号。

然而，由 (5.3) 式给出的收益率保持不变。这样，一项业务中的收益率完全由此业务中的资金流与发生这些资金流的时间所决定，并且无论从借方还是贷方的观点看都是一样的。

收益率常被用作一项指标用以度量一项特定的业务受欢迎或不受欢迎的程度。从贷方的观点看，收益率越高越受欢迎。从借方的观点看则情况正相反。虽然这些方便的规则经常产生合理的结果，但在 5.3 节， 5.8 节和 5.9 节中会有一些例子，其中象这样引用收益率会产生困难。 5.8 节和 5.9 节将包括对比较不同金融业务的方法的更系统的讨论。

收益率不一定要是正的，若收益率为零，则投资人 (贷方) 从

投资中未得到回报。若收益率为负，意味着投资人 (贷方) 在此项业务中亏了本。我们将假设这种负收益率满足 $-1 < i < 0$ 。对于 $i < -1$, 即 $1 + i < 0$ 的情形很难找到任何实际的假设。

并非所有的业务都是两方业务。例如，考虑例 5.1 中总结的投资项目。容易想象，这一项目中的资金输出流可以流向多方，资金输入流也可以来自多方。假若如此，收益率的计算对投资者 (贷方) 仍然有效。然而在这类业务中应用此同一收益率的另一方则不再是单一的借款人。

在应用收益率时另一个重要的方面是要考虑所包含时期的长短。例如，考虑一笔投资时有两种选择： A 和 B 。选择 A 的贷款实质利率是 9%, 为期 5 年；而选择 B 的贷款实质利率是 8%, 为期 10 年。投资者应选择哪一种？

如果回答说，选择 A 比选择 B 好，因为其收益率高，那是太天真了。假如我们只希望投资 5 年，那末简单地比较收益率是有效的。但假如我们要投资 10 年，那就要考虑将选择 A 在头 5 年结束时所得款项进行再投资的利率会是多少。

这样，使用收益率来比较各种投资方案只有当所有方案的投资周期都相同时才是有效的。 5.4 节含有对再投资利率的更全面的处理。

以上定义和公式都假设付款是在整数个时期作出的。但其结果容易推广到也包含其他正规或非正规的区间。

求解收益率类似于求解年金的未知利率。事实上，假如各次付款构成一基本年金，则可直接使用 3.8 节中讨论的方法。

假如各次付款并不构成基本年金，其方法也是类似的。一般而言，可以将迭代方法用于解 (5.3) 给出的求值方程。在实践中解这类问题最容易的方法是用一台有现成金融函数的袖珍计算器或用带有金融软件包的个人计算机。这两种选择都含有能处理这些计算的子程序。

例 5.1　求表 5.1 中总结的投资项目的收益率。求值方程为

$$\begin{aligned}100(-10 &- 5v - v^2 - v^3 - v^4 - v^5 \\ &+ 7v^6 + 8v^7 + 9v^8 + 10v^9 + 12v^{10}) = 0.\end{aligned}$$

由具有现成金融函数的袖珍计算器算得的收益率为 .1296 或 12.96% 。

例 5.2　对本节中所给出的例子，如要选择 A 在整个 10 年内等价于选择 B, 试确定选择 A 在第二个 5 年内所需有的实质利率。

设所求利率为 i, 求值方程为

$$(1.09)^5(1+i)^5 = (1.08)^{10}$$

或

$$i = \frac{(1.08)^2}{1.09} - 1 = 0.0701, \text{ 或}7.01\%.$$

这样，如果投资者预期在第 5 年末通行利率会大于 7.01%, 则 A 将是较好的选择，否则宁愿取选择 B 。

§5.3　收益率的唯一性

直觉告诉我们，象 5.2 节中定义的收益率应是唯一的，事实上，在大多数常见的金融业务中收益率也确实是唯一的。然而，偶然也会碰到一些金融业务，在其中收益率不唯一。

例如，考虑这样一笔业务，某人立即付款 \$100, 并在第 2 年之末付 \$132, 以换取在第 1 年之末返回 \$230 。这笔业务的求值方程是

$$100(1+i)^2 + 132 = 230(1+i)$$

或

$$(1+i)^2 - 2.3(1+i) + 1.32 = 0.$$

分解因子可得

$$[(1+i)-1.1][(1+i)-1.2]=0.$$

这样，收益率可等于 10% 或 20%!

存在多重收益率这一事实对大多数人来讲直觉上难以理解。然而，如果我们重新回忆 (5.3) 式

$$P(i)=\sum_{t=0}^{n} v^t R_t = 0 \tag{5.3}$$

就不会感到奇怪。(5.3) 式是一个关于 v 的 n 次代数方程。如将其两端乘上 $(1+i)^n$, 可改写成关于 i 的 n 次代数方程。如所周知，n 次代数方程有 n 个根 (包括复根和 m 重根，$m>1$, 视为 m 个根)。在上面的例子中，我们碰到的是二次方程，它恰有两个正根 i 。

因为收益率被广泛用来度量一笔业务的金融价值，故在实践中弄清收益率是否唯一是相当重要的。

一种收益率为唯一的很常见的情形是：所有某一方向的资金流均在另一方向的资金流之前。讲得更一般些，就是这样一种状态：在这笔业务的第一部分，所有净付款都是同一符号的，而在业务的余下部分则为相反符号。

用数学术语来讲，这一状态可描述为存在某个 $k, 0<k<n$, 使 $R_t \le 0$ 对 $t=0,1,2,\cdots,k$, 而 $R_t \ge 0$ 对 $t=k+1,k+2,\cdots,n$ 。表 5.1 给出的金融业务就是这种类型，其中 $n=10$ 而 $k=5$ 。

容易证明此种情况的收益率是唯一的。把 (5.3) 式的左端视为 n 次多项式，我们看到它只有一次变号，由 Descartes 符号定理知最多只有一个正的实根。因为 $v>0$, 故 $i>-1$ 。这样，唯一性不仅对正的 i 值成立，而且对 $i>-1$ 的负值也成立。这已覆盖了所有我们关心的值，因为 $i<-1$ 并无实际意义。

Descartes 符号定理也给了我们可能存在的多重收益率的重数的上限。收益率的最大重数等于资金流的符号改变次数。自然，收益率的实际重数可能明显小于最大重数。

实际上收益率在比上面广得多的条件下是唯一的，可以证明如在整个投资期间未动用投资余额始终为正，则收益率是唯一的。

设 B_t 为在时刻 t 的未动用投资余额，其中 $t = 0, 1, 2, \cdots, n$ 。我们有

$$B_0 = C_0 \tag{5.4}$$

及

$$B_t = B_{t-1}(1+i) + C_t \text{ 对} t = 1, 2, \cdots, n. \tag{5.5}$$

可以证明，如果

1. $B_t > 0$ 对 $t = 0, 1, \cdots, n-1$, 以及

2. 存在 $i > -1$ 使公式 (5.3) 满足，则 i 是唯一的.

证明如下。条件 $i > -1$ 是必要的，它保证 $1+i$ 为正。今重写 (5.3) 式为

$$C_0(1+i)^n + C_1(1+i)^{n-1} + \cdots + C_{n-1}(1+i) + C_n = 0.$$

我们知道

$$\begin{array}{lcr}
B_0 = & & C_0 > 0 \\
B_1 = & B_0(1+i)+ & C_1 > 0 \\
B_2 = & B_1(1+i)+ & C_2 > 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
B_{n-1} = & B_{n-2}(1+i)+ & C_{n-1} > 0 \\
B_n = & B_{n-1}(1+i)+ & C_n = 0.
\end{array}$$

由逐次代入以上方程有

$$B_n = C_0(1+i)^n + C_1(1+i)^{n-1} + \cdots + C_{n-1}(1+i) + C_n = 0. \tag{5.6}$$

这是预期的结果，因为投资恰应在第 n 个时期之末结束。注意 $C_0 > 0$ 及 $C_n < 0$, 但对 $t = 1, 2, \cdots, n-1, C_t$ 可正可负，也可为零。

为了证明 i 的唯一性，假设 $j > i$ 为另一个收益率。设对于利率 j 在时刻 t 的未动用投资余额为 B'_t, 则有

$$
\begin{aligned}
&B'_0 = C_0 = C_0 = B_0\\
&B'_1 = B'_0(1+j) + C_1 > B_0(1+i) + C_1 = B_1\\
&B'_2 = B'_1(1+j) + C_2 > B_1(1+i) + C_2 = B_2\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&B'_{n-1} = B'_{n-2}(1+j) + C_{n-1} > B_{n-2}(1+i) + C_{n-1} = B_{n-1}\\
&B'_n = B'_{n-1}(1+j) + C_n > B_{n-1}(1+i) + C_n = B_n = 0.
\end{aligned}
$$

但这是矛盾的，因为如果 j 是收益率， B'_n 必须等于零。因此 j 不可能大于 i, 对于 $-1 < j < i$ 的情况证明是类似的，这样就建立了 i 的唯一性。

由此可见，假如在整个投资时期内未动用投资余额始终为正，则收益率是唯一的。然而，如果未动用投资余额在任一点变为负，则收益率就不一定是唯一的。

多重收益率可能发生这件事也许会给读者以震动，并感到它好象有点是人为的，在通常的金融业务中并不现实。虽然这种现象并不多见，但在实际生活中确实会发生。一个现实的例子是投资于一家工厂，它在投资时期的中途需要支出大修的费用。由此形成的净资金流符号的改变可能引出多重收益率。

本段的讨论集中于多重收益率的可能性。但也可能根本不存在收益率或所有收益率均为虚数。在例 5.3 中和例 5.4 中分别展示了这些可能性。

读者如对多重收益率的进一步讨论感兴趣，可以参看书末文献中列举的 W. H. Jean (1968) 和 D. S. Promislow (1980) 的论文。

例 5.3　A 从 B 处以 8% 的实质利率借到 \$1000, 又将这笔钱以 10% 实质利率借给 C, 问在此项业务中 A 的收益率是多少？

在此例中，A 可以在 1 年之末得到 \$20 的利润，而根本没有净投资。这样，不存在收益率。我们也可说收益率为无穷大。然而，这样一种说法就无法将这笔业务和另一笔更合算的业务相区别：在后者中，A 将 \$1000 以 12% 实质利率借给第四方 D 。

例 5.4　某人立即付款 \$100, 2 年之末再付款 \$101, 用以换取在第 1 年末得到 \$200 的付款，问这项业务的收益率是多少？

求值方程为

$$100(1+i)^2+101=200(1+i)$$

或

$$100i^2=-1.$$

这样，收益率全为虚数！

§5.4　再投资率

在 5.3 节和以前各章中我们并没有直接考虑过由贷款人从借款人处收到的付款进行再投资的问题。这实际上隐含着一种假定，即贷方可将从借款人处收到的付款按照与原先投资率相同的*再投资率*进行再投资。

在实际生活中，上述假定可能成立，也可能不成立，要看情况而定。如果贷款人在再投资中无法达到原先那样高的投资率，则考虑了再投资的总体收益率将低于原先宣称的收益率。另一方面，如果再投资率高于原先的投资率，则总体收益率将高于宣称的收益率。

实际上，我们已经看到过一个考虑再投资率的例子。例 5.2 就考虑了将选择 A 在第 5 年末所得进行再投资，以与选择 B 在

10 年内所得相比较。我们现在来分析其他两个直接计入再投资率的例子。

首先，考虑以利率 i 投资 1，为期 n 个时期，其中产生的利息以利率 j 进行再投资。需要确定在第 n 个时期末的积累值。图 5.1 是此项投资的示意图。

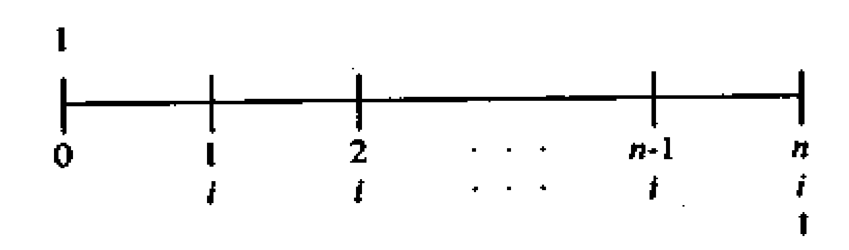


图 5.1　将 1 投资 n 个时期的再投资率时间图

第 n 个时期末的积累值应为本金加利息的积累值，即

$$1+is_{\overline{n}|j}. \tag{5.7}$$

当 $i=j$ 时 (5.7) 式化简为熟知的 $(1+i)^n$ 。

其次，考虑在 n 个时期内，每个时期末以利率 i 投资 1，而利息以利率 j 进行再投资。需要确定此项年金在第 n 时期末的积累值。图 5.2 是此项投资的示意图。

此项年金的积累值等于年金付款与利息积累值之和，即

$$n+i(Is)_{\overline{n-1}|j}=n+i\left[\frac{s_{\overline{n}|j}-n}{j}\right]. \tag{5.8}$$

如果 $i=j$, (5.8) 式可化简为熟知的 $s_{\overline{n}|}$ 。

在金融计算中再投资率的考虑已变得越来越重要，并且比以前用得更加广泛。这就反映了近年来利率的变化无常，以及投资者的日趋老练。

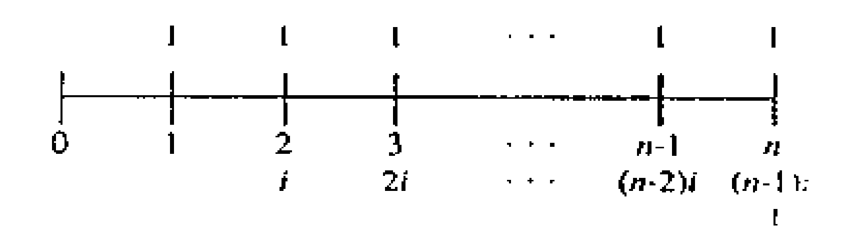


图 5.2　在 n 个时期内每时期末投资 1 的再投资率时间图

对于贷款人 (投资人) 来说，一项重要的考虑是借款人的返回率。返回越 "快"，则再投资就显得越重要；返回越 "慢"，则原始投资率主宰计算的时间就越长。这一现象将从例 5.6 节中见到。度量返回率的一种解析方法将在 9.8 节中给出。

最后要看到的是：包含再投资率的金融计算的结果将依赖于所讨论的时期的长短。因此，当计及再投资率时确定时期的长短是重要的。

例 5.5　在 10 年期内每年初投资 $1000，此项投资的实质利率为 7%，而其利息可按 5% 实质利率再投资。(1) 试确定第 10 年之末基金中的金额，(2) 如要产生 8% 的实质收益率，求投资者应付的购买价格。

1. (5.8) 式适合于初付年金的一种变形是

$$n + i(Is)_{\overline{n}|j} = n + i\left[\frac{s_{\overline{n+1}|j} - (n+1)}{j}\right].$$

因而第 10 年末的基金金额为

$$1000\left[10 + 0.07\left(\frac{s_{\overline{11}|0.05} - 11}{0.05}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= 1000\left[10+0.07\left(\frac{14.2068-11}{0.05}\right)\right] \\
&= \$14490,
\end{aligned}
$$

算到元为止。正如预期那样，此答案在 $1000\ddot{s}_{\overline{10}|0.05}=\$13,207$ 与 $1000\ddot{s}_{\overline{10}|0.07}=\$14,784$ 之间。

2. 产生 8% 实质收益率的购买价格应为

$$
14490(1.08)^{-10}=\$6712,
$$

算到元为止。

例 5.6　比较例 3.3 中描述的三种贷款返回安排的收益率，其中假设返回给贷款人的款项可按 7% 的利率再投资，而不是原贷款的 9% 。

1. 所有付款在第 10 年末的积累值为

$$
1000(1.09)^{10}=\$2367.36.
$$

收益率 i 由求值方程

$$
1000(1+i)^{10}=\$2367.36
$$

可得。立即可知 $i=0.09$ 。在此种情形下，再投资的风险根本不会产生，因为借款人在贷款到期前不返回任何款项。

2. 所有付款在第 10 年末的积累值可由直接应用 (5.7) 式而得为

$$
1000+90s_{\overline{10}|0.07}=1000+90(13.8164)=\$2243.48.
$$

收益率由求值方程

$$
1000(1+i)^{10}=\$2243.48.
$$

而得，为 $i=0.0842$ 或 8.42%。这一答案小于情形 1 的答案，因为 7% 的再投资率在此是起作用的。

3. 所有付款在第 10 年末的积累值为

$$\left[\frac{1000}{a_{\overline{10}|0.09}}\right] s_{\overline{10}|0.07} = (155.82)(13.8164) = \$2152.88.$$

收益率 i 由求值方程

$$1000(1+i)^{10} = \$2152.88$$

而得，为 $i=0.0797$ 或 7.97%。此答案比情形 2 的答案更小，因为按情形 3 的返回安排，其返回比情形 2"更快"，这就增加了再投资率对答案的影响。注意正如所预期的，收益率仍超过 7%。

§5.5 基金的利息度量

在实际工作中一个重要的问题是如何决定一项投资基金所得到的收益率。回忆一下，在 1.3 节中给出的实质利率的基本定义是假设本金在整个时期中保持为常数，而所有的利息是在期末支付的。但在实际中，这些假设常常不满足。一项基金常可因新的本金存入而增加，或因本金抽回而减少，还可因一个时期内多次(常在非正规的时间区段) 赚得的利息而增加，对这些情形必须给出确定合理的实质利率的方法。

考虑如何决定在一个度量时期内由基金赚得利息的实质利率。给出下列定义：

A = 基金在期初的金额

B = 基金在期末的金额

I = 在此时期中赚得利息的金额

C_t = 在时刻 t 投入的本金净金额 (可正或负),
其中$0 \leq t \leq 1$

C = 在此时期投入的本金总净金额 (可正或负),
$C = \sum_t C_t$

${}_a i_b$ = 在时刻 b 投资 1 在随后的长度为 a 的时期内
所赚得的利息金额，其中$a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq 1$.

注意按 5.3 节中所用的符号 $A = B_0$ 及 $B = B_1$, 我们用包含 A 和 B 的其他符号，目的是要建立一个有传统符号的广泛使用的公式。

期末的基金金额必须等于期初的基金金额加上投入的净本金(正或负), 再加上赚得的利息，即

$$B = A + C + I. \tag{5.9}$$

为了与 1.3 节中实质利率的定义保持一致，我们将假设所有赚得的利息 I 是在期末接受的。这样对于在时期 $0 \leq t \leq 1$ 赚得利息的精确的求值方程应为

$$I = iA + \sum_t C_t \cdot {}_{1-t} i_t. \tag{5.10}$$

不幸， (5.10) 的形式不能直接用来解 i, 必须找到 ${}_{1-t}i_t$ 的值。假设整个时期都是用复利，则有

$${}_{1-t}i_t = (1+i)^{1-t} - 1. \tag{5.11}$$

可以将 (5.11) 代入 (5.10), 得到关于 i 的精确方程。此方程可用迭代法求解。只要基金余额不会变负， 5.3 节保证了由迭代法解得的利率是唯一的。

如果不提供计算机或带有现成金融函数的袖珍计算器以致无法进行迭代，或者只需要近似解，则可以假设

$$ {}_{1-t}i_t \doteq (1-t)i \tag{5.12} $$

以导出一个简化公式。

(5.12) 式实际上是此种情形的单利形式。我们可以将 (5.12) 代入 (5.10) 并解 i, 得到

$$ i \doteq \frac{I}{A+\sum_t C_t(1-t)}. \tag{5.13} $$

(5.13) 式的分子是基金中赚得的利息金额，分母则可解释为投资本金的平均金额，它常被称为*与 i 有关的本金*。虽然，由于使用了单利假设，(5.13) 并不产生真实的实质利率，但它所产生的结果常常是与真实的实质利率相接近的，只要所有 C_t 相对于 A 来说是小量，而实际情况往往确是如此。然而，如果 C_t 相对于 A 并不小，则误差将很明显。

(5.13) 式是可以直接计算的，但分母上的和式算起来比较麻烦。因而，常常作出一个进一步简化的假设，即认为本金的存入和抽回在整个投资时期内是均匀发生的。这样，平均说来，可以假定净本金投入发生在时刻 $t=1/2$ 。在此假设下，(5.13) 式变为

$$ \begin{aligned} i &\doteq \frac{I}{A+0.5C} \\ &= \frac{I}{A+0.5(B-A-I)} \quad \text{由 (5.9) 式} \\ &= \frac{2I}{A+B-I} \end{aligned} \tag{5.14} $$

图 5.3 展示了此公式的时间图。

(5.14) 是一个重要的公式，它在实际中被广泛用来计算赚得的利率，例如，一些保险管理人员用它来计算保险公司投资资产

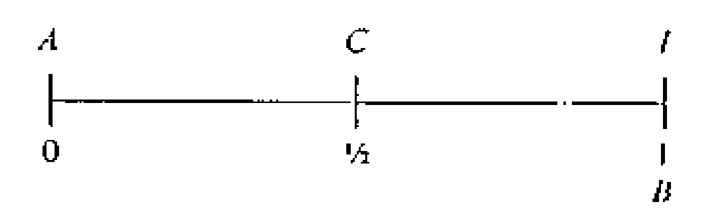


图 5.3　公式 (5.14) 的时间图

的收益率。这是一个很方便的公式，因为它仅包含 A, B 和 I, 而这些量都是很容易提供的。然而，也应当记得它曾假设净本金投入发生在时刻 $t=1/2$ 。如果此假设不能保证，则应使用更为精确 (但仍是近似) 的公式 (5.13) 。

在某些情形下，可以建立比 (5.14) 更准确的 (5.13) 的简化形式。例如，假如我们知道净本金投入平均说来发生在时刻 $k, 0 \le k \le 1$, 则这样就有 (5.14) 的一种如下推广形式：

$$i \doteq \frac{I}{kA+(1-k)B-(1-k)I}. \tag{5.15}$$

公式 (5.15) 的导出留作习题。很明显，当 $k=1/2$ 时 (5.15) 就变为 (5.14) 。然而，假如我们知道平均说来净本金投入发生在 4 月 1 日，则对于一日历年的计算，用公式 (5.15) 并取 $k=1/4$ 应当产生比用 (5.14) 更为优越的结果。

(5.12) 式看起来非常类似于 1.4 节中定义的单利。然而，如考虑各自假设下的 δ_t 的形式，就可看出这两者并不等价。

按 1.4 节的定义单利的积累函数是

$$a(t)=1+ti. \tag{1.5}$$

这相当于假设

$${}_t i_0 = ti. \tag{5.16}$$

在此假设下， δ_t 的表示式由 (1.34) 给出为

$$\delta_t = \frac{i}{1+ti}. \tag{1.34}$$

至于由 (5.12) 式确定的单利形式，则有

$$e^{\int_t^1 \delta_r dr} = 1 + {}_{1-t}i_t = 1 + (1-t)i$$

或

$$\int_t^1 \delta_r dr = \log_e[1 + (1-t)i].$$

对 t 微分得

$$\delta_t = \frac{i}{1+(1-t)i} \quad 对 0 \le t \le 1. \tag{5.17}$$

显然 (1.34) 式与 (5.17) 式并不等价。事实上，它们仅当 $t = 1/2$ 时才等价。不仅如此，还应注意公式 (1.34) 是关于 t 的递减函数；而 (5.17) 式则是 t 的递增函数。

对于连续支付的基金也可建立类似的结果。设 B_t 为在时刻 t 的未动用基金余额 $(0 \le t \le n)$，并设在时刻 t 以每时期 C_t 的比率连续地给出投入 (正的或负的)，这样就有 (5.6) 的一种如下推广形式：

$$B_n = B_0(1+i)^n + \int_0^n C_t(1+i)^{n-t}dt. \tag{5.18}$$

实质上，公式 (5.18) 告诉我们，基金在 n 个时期之末的余额，等于基金开始时的余额带利息积累 n 个时期的积累值，再加上所有中间插入的付款 (正的或负的) 以 $C_t dt$ 金额带利息积累至 n 个时期末的积累值。

如允许利息效力连续变化，可得到一个更为一般的公式。即可给出 (5.18) 式的一种推广形式为

$$B_n = B_0 e^{\int_0^n \delta_s ds} + \int_0^n C_t e^{\int_t^n \delta_s ds} dt. \tag{5.19}$$

伴随 (5.19) 式有下列微分方程

$$\frac{d}{dt}B_t = \delta_t B_t + C_t. \tag{5.20}$$

公式 (5.20) 有一个有趣的字面解释。该式左边是基金余额在时刻 t 的瞬时变化率，而右边则将此瞬时变化率归因于两个因素，即：(1) 对基金余额 B_t 效力为 δ_t 的利息，加上 (2) 在时刻 t 对基金的投入率 (正或负) 。公式 (5.20) 的推导留作习题。

诸如 (5.18), (5.19) 和 (5.20) 这些公式在概念上很有启发性，但实际应用中它们用得不多。

例 5.7 某年之初建立一项投资基金，初始存款为 \$1000, 4 个月之后又存入 \$500, 在第 6 个月和第 8 个月之末分别抽回 \$200 和 \$100, 在该年末基金的总金额为 \$1272 。试用 (5.13) 式求基金在此年内的近似实质利率。

所计算的赚得利息为

$$1272 - (1000 + 500 - 200 - 100) = 72.$$

应用 (5.13) 式，即有

$$i = \frac{72}{1000 + \frac{2}{3}\cdot 500 - \frac{1}{2}\cdot 200 - \frac{1}{3}\cdot 100} = \frac{72}{1200} = 0.06 \text{ 或} 6\%.$$

例 5.8 由下列数据求一家保险公司在一个日历年内的实质利率：

年初资产	\$10000000
保险费收入	1000000
投资毛收入	530000
保险赔偿费	420000
投资损耗	20000
其他损耗	180000

通常要在总投资收入中扣除投资损耗，故有下列方程：

$$\begin{aligned} A &= 10000000 \\ B &= 10000000 + 1000000 + 530000 \\ &\quad -420000 - 20000 - 180000 \\ &= 10910000 \\ I &= 530000 - 20000 \\ &= 510000. \end{aligned}$$

因此，由 (5.14) 式

$$\begin{aligned} i &= \frac{2(510000)}{10000000 + 10910000 - 510000} \\ &= 0.05 \text{ 或} 5\%. \end{aligned}$$

§5.6 时间加权利率

当投资经历变化较大时，在 5.5 节中概述的计算一项投资基金收益率的方法，对于不同时段内的投资金额是敏感的。例如，假定在得益较“高”时恰巧“大量”投资，而在得益较“低”时则“小量”投资，则总体收益率将是令人满意的。反之则情况相反。

我们可用一个极端的例子来展示这种现象。假设一个投资者有一投资基金，其中一笔 \$1000 的投资在第 6 个月之末仅值 \$500，但在 1 年之末仍值 \$1000 。如果在这 1 年内本金既无存入又无抽回，则全年的收益率显然为 0 。

现在考虑，假如投资者在第 6 个月之末对未动用投资余额加倍，情况将会如何。因原始投资 \$1000 在第 6 个月之末仅值 \$500，故投资者就在其时再存入 \$500 。这样，新的 \$1000 的余额在年底将值 \$2000 。此笔业务的求值方程为

$$1000(1+i) + 500(1+i)^{1/2} = 2000$$

此方程可作为未知量 $(1+i)^{1/2}$ 的二次方程来解，得到的收益率为 $i=.4069$, 或 40.69% 。

其次考察，假如投资者在第 6 个月之末仅值 \$500, 故投资者在其时抽回 \$250 。这样，新的 \$250 的余额在年底将值 \$500 。这笔业务的求值方程是

$$1000(1+i)-250(1+i)^{1/2}=500.$$

仍解关于 $(1+i)^{1/2}$ 的二次方程，得到的收益率为 $i=-0.2892$ 或 -28.92% 。

基于实际投资特性的这项基金其收益率看来似乎应当为零。然而，在上述的第一个例子中收益率明显大于零，这是因为投资者恰在投资经历变得非常有利的时候存入本金。在第二个例子中情况正相反。投资者抽回本金使收益率明显变负。

因为投资金额显然影响计算得到的收益率，用 5.5 节中方法计算的比率有时称为 *币值加权利率* 。应该注意前几章中建立起来的复利计算是在这一基础上进行的。

现在假定这项基金的投资决策是由一位投资经理作出的，而存入或抽回本金则是由基金的拥有人决定的。虽然上述两个例子中币值加权计算对基金拥有人提供了其实际收入的精确度量，但这些计算却没有给投资经理提供一个“真实”特性的好的度量，它是零。

这样一种度量应该基于另一种计算基金收益的方法，称为 *时间加权利率* 。在这种方法中；我们将考虑这一年中每存一次存入或抽回而构成的逐个区段。在上面的例子中，头 6 个月的收益率为 $j_1=-50\%$ 而后 6 个月的收益率则为 $j_2=100\%$ 。对于全年来说可以组合而得

$$1+i=(1+j_1)(1+j_2)=(1-0.5)(1+1)=1.$$

这样，不管本金存入或抽回， $i=0$ 。

可以将这一方法推广如下。假设在一年中的某些时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}$ 共有 $m-1$ 次本金的存入或抽回。这样整个一年就被划分为 m 个区段，如图 5.4 所示。

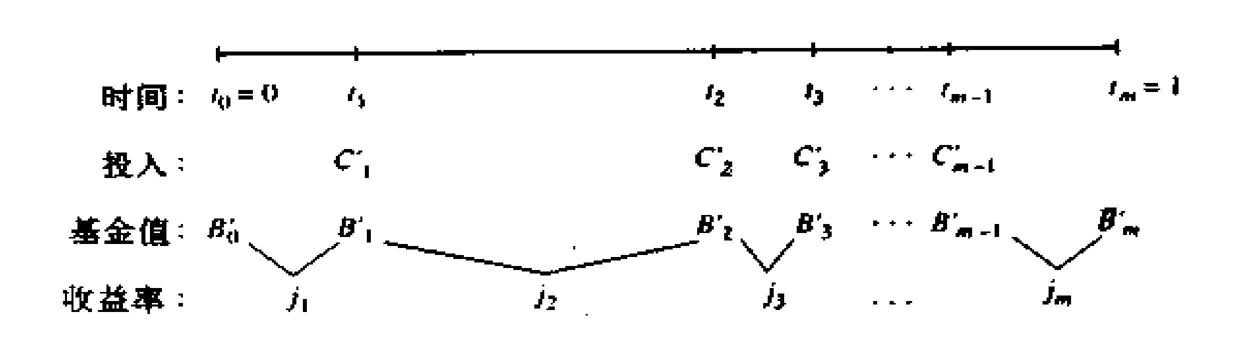


图 5.4　时间加权利率的时间图

设在时刻 t_k 对基金的净投入金额 (可正可负) 为 C'_k $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 。符号上的 "$'$" 是用来与本章早先的符号相区别，即实际上 $C'_k=C_{t_k}$ 。设恰在每次投入之前的基金值为 B'_k $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 。基金在全年开始时的值记为 $B'_0=B_0$，在全年结束时的值记为 $B'_m=B_1$ 。最后，设 m 个区段的收益率分别为 j_k $(k=1,2,\cdots m)$ 。

由时间加权方法计算的 m 个区段的收益率为

$$1+j_k=\frac{B'_k}{B'_{k-1}+C'_{k-1}}$$

或

$$j_k=\frac{B'_k}{B'_{k-1}+C'_{k-1}}-1 \text{ 对} k=1,2,\cdots,m. \tag{5.21}$$

换言之，对于每一区段，1 加上收益率等于该区段末的基金余额除以该区段初的基金余额。

全年的收益率则由

$$1+i=(1+j_1)(1+j_2)\cdots(1+j_m)$$

或

$$i=(1+j_1)(1+j_2)\cdots(1+j_m)-1 \tag{5.22}$$

得出。

必须指出，由时间加权方法计算的收益率并不与复利一致。然而，对于描述基本投资特性来说，时间加权计算确实提供了比币值加权计算更好的指标。当然，币值加权计算对实际达到的投资结果提供了有效的度量。

例 5.9　在 1 月 1 日某投资帐户有款 \$100000, 到 5 月 1 日其值增加到 \$112000, 并存入 \$30000 的新本金。到 11 月 11 日其值减少为 \$125000 并抽回 \$42000, 到次年 1 月 1 日此投资帐户再次有存款 \$100000 。试用 (1) 币值加权方法，(2) 时间加权方法分别计算收益率。图 5.5 所示为本例的业务。

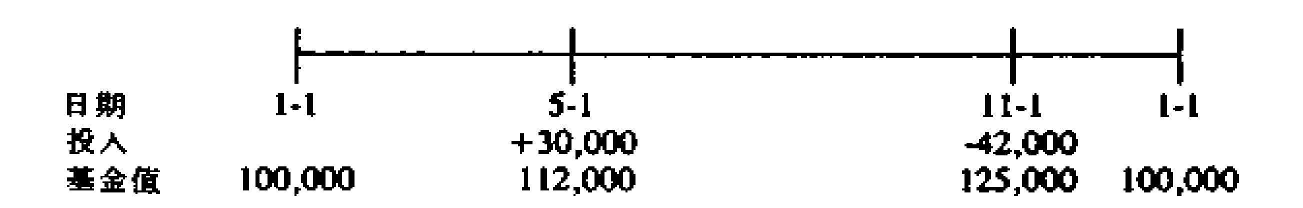


图 5.5　例 5.9 的时间图

1. 赚得的利息总额可由 (5.9) 式而得，即

$$B=A+C+I.$$

故有

$$100000=100000+(30000-42000)+I$$

或

$$I = 12000.$$

由 (5.13) 式可得币值加权利率为

$$\begin{aligned} i &\doteq \frac{12000}{100000 + \frac{2}{3}\cdot 30000 - \frac{1}{6}\cdot 42000} \\ &= \frac{12000}{113000} = 0.1062,\ 或10.62\%. \end{aligned}$$

如使用复利而不是 (5.13), 可以得到更精确的解答，但解求值方程将需要困难的迭代。在本例中这样做是不值得的。应该指出，在使用币值加权方法时，期中的基金余额 (本例中为 \$112000 和 \$125000) 对答案没有影响。

2. 用公式 (5.21) 和 (5.22) 可得时间加权利率为

$$\begin{aligned} j &= \left[\frac{112000}{100000}\right]\left[\frac{125000}{142000}\right]\left[\frac{100000}{83000}\right] - 1 \\ &= (1.12)(0.880282)(1.204819) - 1 \\ &= 0.1879,\ 或18.79\%. \end{aligned}$$

这样，时间加权利率比币值加权利率大得多。我们仔细分析一下三个区段就可明白产生这种情况的原因。在头 4 个月和最后两个月，投资经历是很有利的，但中间的 6 个月则正相反。因为新的本金恰恰在投资情况变坏前存入，而在投资情况再次转好前却又抽回一笔本金，故币值加权计算就受到了不利的影响。

简言之，币值加权利率 10.62% 是对投资者实际得到的金融收入的度量。而时间加权利率 18.79% 则是对此项投资基金实际特性的度量，它与带有偶然性的投资金额无关。

请读者不要以为，两种方法计算结果一般都有本例中这样大的差别。本例中一方面本金的存入和抽回时机都选择得很坏，另一方面，投资特性又波动很大 (就象在投资于普通股时那样)，两

者合在一起就产生了这样明显的效应。如果投资特性比较稳定，或者本金的存入与抽回与基金余额相比为较小，或两种情况都发生，则两种方法的差别就会小得多。实际上，在以稳定利率投资于稳定的投资基金时，两种方法的差别通常是不重要的。

§5.7 投资组合方法与投资年度方法

考虑一种常见的情况，即一项投资基金是若干个不同的个体(个人或公司)共同持有的。一个例子是一项养老基金，其中每个参加此计划者有其自己的帐户。然而，此项投资基金又是混合的，即每个帐户并非有自己独立的资产，而是在整个帐户中占有一定比例的一份。

会出现一个问题是该如何分配利息给各个帐户。有两种常用的分配利息给各个帐户的不同方法，那就是*投资组合方法*与*投资年度方法*。

在投资组合方法中，计算出一个基于整个基金所得的平均比率，并分配到每个帐户。这种方法很简单明了且易于实行。这是一个在各种情况下长年使用的方法。

然而，在利率波动的时期使用投资组合方法会出现问题。例如考虑利率在近期曾有明显上升的情况。投资组合方法可能产生8% 的平均比率，而新的储蓄实际上可以获利 10%。组合利率较低的原因是基金中包含了一些过去所作的低收益率的投资。在这种情况下，实际上是阻止人们向基金作新的存款，而且还是鼓励人们抽回存款。

投资年度方法可用来处理这类问题，它在分配利息时确认投资的日期和当前日期。这是一种在 1960 年代和 1970 年代开始流行的新方法，当时正有一较长的利率上升时期。在投资年度方法中新的存款利率 (在上例中是 10%)，常被称为“*新投资资金收益率*”。

在实践中，投资年度方法用起来显然比投资组合方法要复杂一些。然而，许多诸如银行和保险公司的金融机构，感到需要在利率上升时期利用投资年度方法来吸引新的储蓄及不鼓励抽回本金。自然，当利率下降时情况正相反，这时投资组合方法比投资年度方法更有吸引力。当利率频繁地上下波动，犹如在 1980 年代那样，这将变成一个很有趣的猜测哪种方法更为有利的游戏。

在应用投资年度方法时，会立即产生一个与再投资率有关的问题。在实践中建立了两个针对这一问题的一般方法。在第一种方法即*下降系统*中，当需要再投资时，伴随一个特定投资年度的基金会减少。而投资年度方法中的利率反映了对于减少中的余留资产的投资率。

相反地，在第二种方法即*固定系统*中，伴随一个特定投资年度的基金金额保持固定。投资年度方法中的利率反映了被随后的再投资率所修正的对原始投资的投资率。

在实行投资年度方法时，另一项考虑是要在某个时刻将过程截断。举一个极端的例子，譬如将投资年度方法保持 100 年是没有什么意义的！通常说来，选择任一个时期，在此之后这一过程就停止而回复到投资组合方法。例如选择应用投资年度方法的时期是 10 年，则任何存入超过 10 年的基金将按投资组合方法来分配。

在实际中，实行投资年度方法的通常做法是：按照原始投资日期和从那时以来经过的时间规定一个二维的利率表格。为了表达方便起见，我们假定所有的时期均用日历年来度量，且所有存入和抽回均在 1 月 1 日进行。

设 y 是储蓄的日历年，而 m 是应用投资年度方法的年数。在投资第 t 年分配的利率记为 i_t^y，其中 $t=1,2,\cdots,m$ 。当 $t>m$ 时，将应用投资组合方法而利率仅随日历年变化。在日历年 y 分配的组合利率记为 i^y 。这一符号是在第一章中 (1.4b) 式建立起来并随后使用的符号的推广。

表 5.2 是一个使用投资年度方法分配利率表的例子，其中 $m=5$。表中的第一年是日历年 z，而最近的年份是日历年 $z+10$。

表 5.2　投资年度方法例

原始投资日历年 y	投资年利率					组合利率 i^{y+5}	组合利率的日历年 $y+5$
	i_1^y	i_2^y	i_3^y	i_4^y	i_5^y		
z	8.00%	8.10%	8.10%	8.25%	8.30%	8.10%	$z+5$
$z+1$	8.25	8.25	8.40	8.50	8.50	8.35	$z+6$
$z+2$	8.50	8.70	8.75	8.90	9.00	8.60	$z+7$
$z+3$	9.00	9.00	9.10	9.10	9.20	8.85	$z+8$
$z+4$	9.00	9.10	9.20	9.30	9.40	9.10	$z+9$
$z+5$	9.25	9.35	9.50	9.55	9.60	9.35	$z+10$
$z+6$	9.50	9.50	9.60	9.70	9.70		
$z+7$	10.00	10.00	9.90	9.80			
$z+8$	10.00	9.80	9.70				
$z+9$	9.50	9.50					
$z+10$	9.00						

对于某一确定的投资年份，利率的变化形式是先按照水平线一直走到右边一列，然后折为向下。

对于任一确定的日历年，利率分配表现为向上、向右的对角线。

各投资基金之间的竞争通常集中在第一年分配的新存户利率，以诱使存户向其基金投资。新存户利率出现在冠以 i_1^y 的一列中。

在实际中，实行投资年度方法通常较为复杂，这从表 5.2 可以看出。复杂性的来源之一是投资基金分配利率的改变经常比按年改变更为频繁，例如可按月或按季改变。另一个复杂性是需要处理那种在任何日期的存入或抽回。一般说来，分配利率是按照日历时期计的，而分配的利息则要基于按各利率投资于基金的时期。

还值得注意，表 5.2 中的投资年度方法可能是基于固定系统。如果用下降系统的话，则对每一原始投资的日历年份，沿着水平方向 5 年时期内的利率变化将比表 5.2 所示更接近于常数。

例 5.10　在 $z+4$ 年之初向一投资基金投资 \$1000, 其利率分配按表 5.2 所示。问在日历年 $z+7$ 到 $z+9$ 这三年中共得到多少利息？

在此情形下，很容易修改一下在公式 (1.38) 中所用的方法以按照变利率计算积累值。此项投资日历年 $z+7$ 之初的积累值为

$$1000(1.09)(1.091)(1.092) = \$1298.60.$$

此项投资在日历年 $z+10$ 之初的积累值为

$$1000(1.09)(1.091)(1.092)(1.093)(1.094)(1.091) = \$1694.09$$

这样，从日历年 $z+7$ 到 $z+9$ 所得利息总金额为

$$1694.09 - 1298.60 = \$395.49.$$

§5.8　资金预算

有一个同时面向个体和合伙投资者的问题，是需要决定投资资金的金额及这些资金在各种可能的投资项目之间的分配。作出这类决定的过程常称为*资金预算*。

在实际中，经常遇到资金预算的两种主要方法。第一种称为*收益率方法*。在此方法中，投资者用 (5.3) 式计算每种可供选择的投资的收益率。投资者将建立一个*可接受利率*，它是可以接受的最小的返回率。确定这一可接受利率是一项商业判断的行为，这基于各方面的考虑，诸如增加资金的代价及投资者的利润目标等。

所有收益率高于可接受利率的投资将被进一步考虑，而那些收益率低于可接受利率的投资则将被排除在外。然后将收益率高于可接受利率的供选择的投资方案按收益率高低排序，其中收益率最高的那些按下降顺序一一选用，直到可用于投资的资金用尽为止。

第二种方法是 *净现时值方法* 。这就是投资者用 (5.2) 式对每种可供选择的投资计算 $P(i)$ 。这里 $P(i)$ 是按可接受利率计算的。

具有正的 $P(i)$ 的投资将被进一步考虑，而具有负的 $P(i)$ 的投资则被排除在外。然后在那些具有正的 $P(i)$ 的投资中间这样分配资金：使得所有投资返回的现时值减去对投资投入的现时值达到最大。现时值是按可接受利率计算的。

如果只存在唯一的收益率，则这两种方法将产生一致的结果。换言之，收益率高于可接受利率的投资将有正的 $P(i)$，反之亦然。然而，收益率不一定存在及唯一这一事实，已使许多金融业的作者宁愿用净现时值方法而不用收益率方法。

另一个情愿用净现时值方法的理由是：作为决策过程的一部分，它已自动使得返回给投资者的金额达到最大。另一方面，收益率方法也有它的吸引力，它很容易掌握和比较。然而，收益率方法的利用在未作附加计算时，并不直接引向用金钱来度量的金融结果。

以上对资金预算的描述都是从投资者 (贷款人) 的观点来看的。在应用资金预算的场合，情况也往往确是这样。但是，也可以将程序修改为由借方来用。此时，收益率方法的规则是反过来用的，也就是说，一项“好”的业务有低的收益率，而“不好”的业务则有高的收益率。另一方面，净现时值方法也可同样对借方来用，只要 (5.2) 式中的 R_t 是从借方角度来看的。

本节对资金预算的讨论并未考虑各种投资所包含的比较风险。大体上我们是假设所比较的各种投资不存在风险。考虑风险

可以改进决策的过程。例如，有一项高风险的预计收益率为 15% 的投资和一项低风险的预计收益率为 14% 的投资，是否会有很多投资人宁愿选前者而不选后者，这是很值得怀疑的。包含风险的金融计算将在 9.5 节中考虑。

本节中对资金预算的描述相当简单，读者如有兴趣要了解进一步的内容，可阅读一些标准的金融教科书。

例 5.11　分析表 5.1 中所给的投资项目作为资金预算的练习。

由例 5.1 可知本项目的收益率为 12.96%, 表 5.3 列举了用公式 (5.2) 对一系列利率算出的净现时值 $P(i)$ 。

表 5.3　例 5.11 的净现时值

利率 i	净现时值 $P(i)$
0%	$27000
5	12675
10	3695
15	-2046
20	-5778
25	-8236

假设一投资者的可接受利率为 10% 。因 $12.96\% > 10\%$, 投资者将会接受此项目作进一步的考虑。如用净现时值方法投资者也会接受它，因为 $P(0.1) = 3695 > 0$ 。

现在转而考虑一投资者，假定其可接受利率为 15%, 则因为 $12.96\% < 15\%$, 此投资者将会拒绝这个项目。而利用净现时值方法投资者也会拒绝它，因为 $P(0.15) = -2046 < 0$ 。

从图形上来分析表 5.3 将给我们以启发。这些结果在图 5.6 中以实线来表示。

显然 $P(i)$ 是利率的单调减少函数。而且它在收益率 12.96% 的左方为正，右方为负。图 5.6 中的实线是金融业务中净现时值

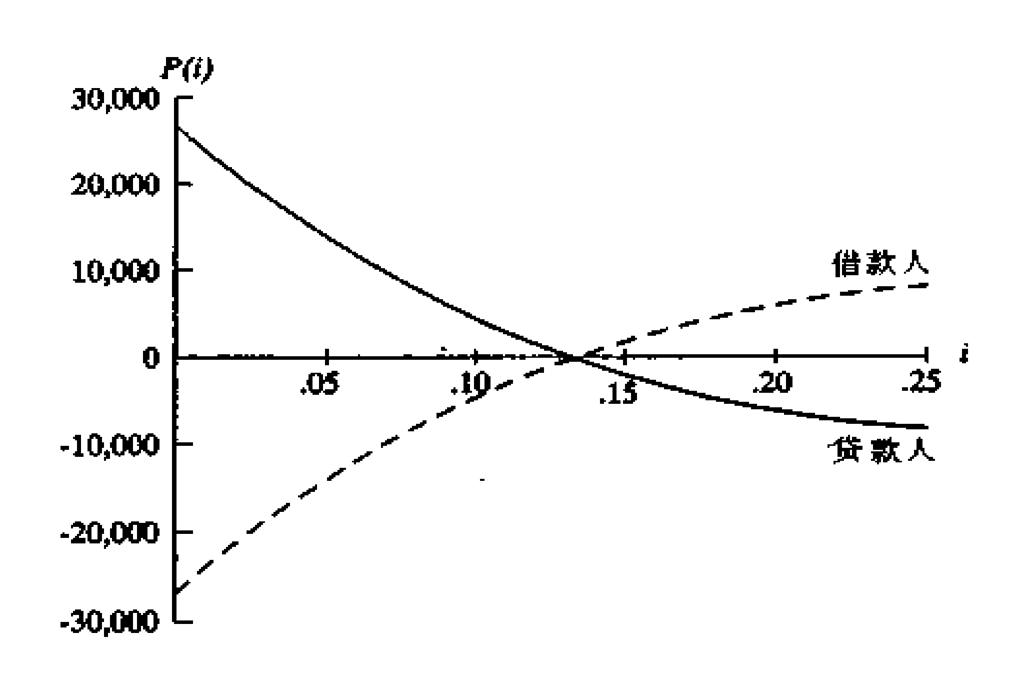


图 5.6　例 5.11 的净现时值

的标准图形，其中对投资者 (贷方) 有唯一的收益率。

读者应注意，具有唯一收益率的金融业务净现时值的图形从此笔业务借方的观点来看是一个递增函数而不是递减函数。为说明这一点，让我们假设表 5.3 中所示项目从借方来看只有一方。对借方来说，对应的图形为图 5.6 中点划线。注意正的 $P(i)$ 值位于收益率的右方而不是左方。

例 5.12　分析 5.3 节开始时的例子，作为资金预算的练习。

图 5.7 是该项业务的时间图。两个进入投资的资金流表示于图的顶部，而一个退出投资的资金流表示于图的底部。

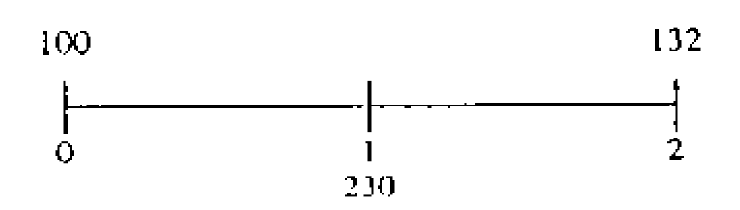


图 5.7　例 5.12 的时间图

由公式 (5.2),

$$P(i) = -100 + 230v - 132v^2.$$

由 5.3 节知它有两个收益率, 10% 与 20% 。表 5.4 列举了对一系列利率的 $P(i)$ 。

表 5.4　例 5.12 的净现时值

利率 i	净现时值 $P(i)$
0%	-2.00
5	-0.68
10	0
15	+ 0.19
20	0
25	-0.48

这些结果展示于图 5.8 中, $P(i)$ 的最大值发生在 14.78%, 但它等于 $P(i)$ 在 15% 的值, 精确到表 5.4 所用的两位小数。

收益率的非唯一性常常成为人们在资金预算中欢喜用净现时值方法而不用收益率方法的理由。然而, 我们现在将指出, 对于净现时值方法问题同样存在。

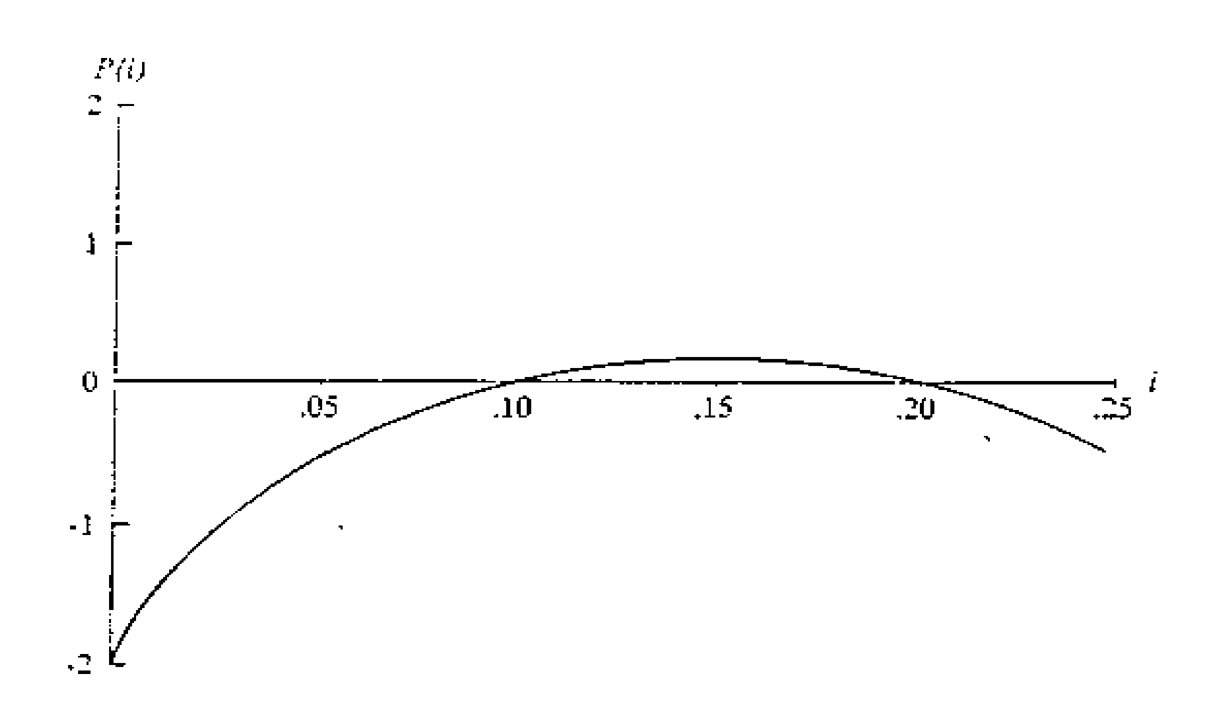


图 5.8　例 5.12 的净现时值

在图 5.8 中，$P(i)$ 在 20% 收益率附近为递减函数，这从对贷款者有利的观点来看是正常的形式。然而，$P(i)$ 在 10% 收益率附近是递增函数。这样，在此例中如果一位贷款人仅要求 5% 的回报率，则这项投资很不好，因为 $P(i)$ 是负的，但如果贷款人要求的回报率提高到 15%，则这又成为一项好的投资，因为 $P(i)$ 现在是正的！这一结果是不合逻辑的，证明了在存在多重收益率的场合，在资金预算中应用净现时值方法并没有解决内在的问题。

§5.9　一般借贷模型

5.3 和 5.8 节已经显示，在存在多重收益率的场合，要对某些金融计算找出合理的解释及对不同的金融业务作出比较会遇到某些困难。在实践中曾提出各种方法以回避多重收益率带来的内在

问题。

一种方法是将未来的资金输出流按一规定的利率贴现，然后仅基于未来的资金输入流来完成其余计算。这项规定的利率是投资者能安全地得到的保守利率。事实上，投资者是为未来的资金输出流“预先设立基金”，即可以在可能付出这些资金输出流之外建立一项基金，它等于按规定利率计算的未来资金输出流的现时值。现在用未来资金输入流计算的收益率将是唯一的。这样一种基金是否实际上建立起来与计算的有效性是无关的。

在本节的余下部分将讨论另一种方法。在 5.3 节中我们曾经指出，如果在整个投资期间未动用投资余额始终为正，则收益率将为唯一。我们可以推广这一结果，并定义一个*纯投资项目*，对此项目所有 $B_t \geq 0$ (当 $t = 0, 1, 2, \cdots, n$) 。一个纯投资项目就是在整个投资期间投资者始终有钱投入此项目。

现在转向借款人的观点而定义一个*纯借贷项目*，在此项目中所有 $B_t \leq 0$ $(t = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 。一个纯借贷项目就是在整个投资时期，投资者始终欠项目钱。这样，在此情形下投资者实际上成了借款人。

若整个投资期间未动用余额有时为正，有时为负，就可能产生多重收益率。我们称此种项目为*混合项目*，因为投资者在投资期间有时是贷款人，有时又是借款人。

这个一般模型是基于这样的前提：投资者在投资期间处于贷款人位置时的利率不同于他处于借款人位置时的利率。当投资者处于贷款人位置，即投资余额 $B_t \geq 0$ 时，可接受利率称为*项目投资率*，并记为 r 。而投资人处于借款人位置，即 $B_t < 0$ 时，可接受利率称为*项目借贷率*，记为 f 。

一般来说，r 会大于 f，因为一个精明的投资者作为贷款人时的可接受利率会比作为借款人时的可接受利率要大。但数学推导并不需要 $r > f$ 。

我们将建立 (5.4) 到 (5.6) 时用的方法推广到现在的情况。初

始基金余额为

$$B_0 = C_0. \tag{5.23}$$

逐次的基金余额可由以下递推公式而得

$$B_t = B_{t-1}(1+r) + C_t,\ 若 B_{t-1} \geq 0 \tag{5.24a}$$

或

$$B_t = B_{t-1}(1+f) + C_t,\ 若 B_{t-1} < 0, \tag{5.24b}$$

其中 $t = 1, 2, \cdots, n$ 。最终基金余额是如下 r 和 f 的多项式：

$$\begin{aligned} B_n \;=\; & C_0(1+r)^{m_0}(1+f)^{n-m_0} \\ & + C_1(1+r)^{m_1}(1+f)^{n-m_1-1} \\ & + \cdots + C_n, \end{aligned} \tag{5.25}$$

其中 m_j 为整数，且 $n \geq m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$ 。在 (5.25) 式中 m_j 是从时刻 j 到时刻 n 中使用利率 r 的时期总数；而其余时候用利率 f 。

如果 $r = f$, 公式 (5.23) 到 (5.25) 即化简为 (5.4) 式到 (5.6) 式。回忆起在收益率点 $B_n = 0$, 如果 $r \neq f$, 收益率概念仍然可用。但在此种一般情形，收益率不是单个的数，而是 r 和 f 之间的一个函数关系。换言之，如果对一个给定的 f, 可以找到一个 r 的值使 $B_n = 0$, 则称 r 和 f 为此项业务的一对收益率。对于存在收益率的业务通常有无穷多对的 r, f, 且可找到 r 与 f 之间的一个函数关系。

以上给出了资金预算中收益率方法的推广。同样也可以推广净现时值方法。回忆一下，定义净现时值的公式 (5.2) 是基于 R_t, 它们是上面所用的 C_t 的负值。因此，净现时值的正值对应于 B_n 的负值，反之亦然。投资者喜欢 B_n 为负值这一事实，可以这样解释：在投资期末投资余额为负对投资者说实际上是有正的余额。

对这个借贷模型的进一步分析感兴趣的读者可参阅书末列举的由 D. Teichroew, A. A. Robichek 和 M. Montalbano 所写的两篇论文 (均 1965) 。

例 5.13　一位投资者欲立即投资 \$1600, 第 2 年之末再投资 \$10000, 以换取在第 1 年之末收到 \$10000 。

(1) 如果 $r = f$, 求收益率。

(2) 如果 r 与 f 是收益率对，将 r 表示为 f 的函数。

(3) 如果 $r = 70\%$, $f = 30\%$, 投资者会接受还是拒绝这笔业务？

(4) 若 $f = 50\%$, 重新考虑 (3) 。

1. 设 $i = r = f$, 求值方程为

$$1600(1+i)^2 + 10000 = 10000(1+i).$$

此二次方程的两个根为

$$i = 0.25 \text{ 或} 25\%$$

及

$$i = 4 \text{ 或} 400\%.$$

这样，我们有了一笔有多重收益率的业务。

2. 投资余额在第 1 年末为正，而第 2 年末为负。故利率 r 在第 1 年应用而利率 f 在第 2 年应用。且有

$$\begin{aligned} B_0 &= 1600, \\ B_1 &= 1600(1+r) - 10000, \\ B_2 &= [1600(1+r) - 10000](1+f) + 10000 = 0. \end{aligned}$$

这决定了 r 和 f 间的一个函数关系。将 r 解为 f 的函数

$$1 + r = \frac{10000}{1600}\left[1 - \frac{1}{1+f}\right],$$

$$
\begin{aligned}
r &= 6.25\left[1-\frac{1}{1+f}\right]-1,\\
&= 5.25-\frac{6.25}{1+f}.
\end{aligned}
$$

r 与 f 的某些样本值见表 5.5 。

表 5.5　例 5.13 的项目率

借贷率 f	投资率 r
25%	25%
100	212.5
150	275
200	317
300	369
400	400

注意在两个收益率处 $r=f$, 正如预期的那样。还应注意在两个收益率之间 $r>f$, 这是正常的关系。然而，在此范围之外 $r<f$ 。最后还应注意当 f 增加时 r 也增加。

3. 用 (5.23) 到 (5.25) 式，就有：

$$
\begin{aligned}
B_0 &= C_0 = 1600,\\
B_1 &= B_0(1+r)+C_1\\
&= 1600(1.7)-10000=-7280,\\
B_2 &= B_1(1+f)+C_2\\
&= (-7280)(1.3)+10000=536.
\end{aligned}
$$

因 $B_2>0$, 投资者拒绝这笔业务。

4. 用上面同样的方法， B_0 与 B_1 不变。新的最终余额为

$$B_2=(-7280)(1.5)+10000=-920.$$

因 $B_2 < 0$, 投资者接受这项业务。

考虑一下为何 (4) 被接受而 (3) 却被拒绝是很有教益的。两个例子间的唯一差别在于借款的可接受利率 f 。如果投资者愿意借贷的最大利率是 30%, 此项业务将被拒绝，但如投资者愿意以高达 50% 的利率借款，则这笔业务将被接受。

习　题

§5.2　贴现资金流分析

1. a) 用延付年金符号表示表 5.1 中投入的现时值。

b) 用延付年金符号表示表 5.1 中返回的现时值。

2. 一项 $C_0 = \$3000$, $C_1 = \$1000$, $R_1 = \$2000$ 及 $R_2 = \$4000$ 的投资的内返回率可表示为 $1/n$, 求 n 。

3. 一项 10 年期的投资项目需要在开始时有 \$100000 的初始投资及每年之初有维持费。第 1 年的维持费为 \$3000, 以后每年增加 6% 。项目的年度返回在第 1 年末为 \$30000, 以后每年减少 4%, 求 R_6 。

4. 一位投资者进入一项契约，他立即付款 \$7000, 第 2 年之末付 \$1000, 以交换在第 1 年末得到 \$4000 和第 3 年末得到 \$5500, 求

a) $P(0.09)$ 。

b) $P(0.10)$ 。

5. 试确定基于 (5.2) 式的 Newton-Raphson 迭代公式，它一般可用来计算未知的收益率。

§5.3　收益率的唯一性

6. a) 在第 4 题中，利用 Descartes 符号规则得到的可能收益率的最大个数是多少？

b) 由该题两个答案明显可知在 9% 与 10% 间存在一收益率，问它是否唯一？

c) 解释你对 b) 的答案。

7. 现在付款 \$100 及 2 年后付款 \$108.15 与 1 年后付款 \$208 对两个利率 i 和 j 都是等价的。确定这两个利率的绝对差。

8. 证明如 C_0 与 C_n 同号就不能保证收益率的唯一性。

9. 一投资者立即付 \$100, 第 2 年末再付 \$X, 以换取在第 1 年末得到 \$200, 试确定 X 使得存在两个绝对值相等而符号相反的收益率。

§5.4　再投资率

10. 一项基金每年末存入相等的金额，要求在第 10 年末积累到 \$1000 。如果存款的实质利率为 8%, 但利息只能以 4% 实质利率再投资，试证明需要的每年存入金额为

$$\frac{1000}{2s_{\overline{11}|0.04}-12}.$$

11. 一笔 \$10000 的贷款在 20 年内以每年末付款 \$1000 来归还。如果每次付款立即以 5% 的实质利率再投资，试确定 20 年间赚得利息的实质年利率。

12. 一投资者购买了一项 5 年期的金融契约，其主要特点为：

(a) 投资者 5 年内每年末收到 \$1000 的付款。

(b) 这些付款享有年实质利率为 4% 的利息。在当年之末，利息可按 3% 的年实质利率进行再投资。试确定要产生 4% 的收益率的购买价格。

13. 一投资者在 5 年内每年之初向一基金存入 \$1000, 该基金的实质利率为 5% 。由此基金得到的利息仅可以 4% 的实质利率再投资。证明在第 10 年末的积累值为

$$1250(s_{\overline{11}|0.04}-s_{\overline{6}|0.04}-1).$$

14. 某 A 以实质利率 17% 投资 \$2000, 为期 10 年。利息为年度支付，并以 11% 的实质利率再投资。在第 10 年末积累利息

为 \$5685.48 。某 B 以实质利率 14% 在每年末投资 \$150, 为期 20 年。利息为年度支付，且以 11% 的实质利率再投资。求 B 在第 20 年末积累的利息。

§5.5　基金的利息度量

15. 一家公司的基金在年初为 \$500000, 而在年末为 \$680000 。赚得的总利息为 \$60000, 还有 \$5000 的投资损耗。试确定基金收益的净实质利率。

16. 一项实质利率为 4% 的基金在年初有 \$1000 的余额，如果在 3 个月后有 \$200 加入基金，而 9 个月后则从基金中抽回 \$300, 试在假定

$$_{1-t}i_t = (1-t)i$$

下求最终余额。

17. a) 在假定 $_{1-t}i_t = (1-t)i$ 下，找出 $_ti_0$ 的表达式。

b) 在假定 $_ti_0 = ti$ 下，找出 $_{1-t}i_t$ 的表达式。

18. 设与 i 有关的本金 (即 (5.13) 式的分母) 记为 E 。用公式 (5.17) 来证明在任一点的利息效力为

$$\delta_t = \frac{I}{E+(1-t)I}.$$

应该注意，按照时间图来说，这等于将利息的总金额 I 放在时间图上的时刻 t 而不是时刻 1 。表达式 $E+(1-t)I$ 常被称为“与 δ_t 有关的本金”。

19. 试推导公式 (5.20) 。

20. 在 (5.18) 式中找出 n 个时期内总净投入的表达式。

§5.6　时间加权利率

21. 在例 5.9 中假设 5 月 1 日换为 6 月 1 日，而 11 月 1 日换为 10 月 1 日，

a) 在用币值加权方法计算时收益率是否改变？

b) 在用时间加权方法计算时收益率是否改变？

22. 在例 5.9 中假设增加一笔在 7 月 1 日抽回 \$5000, 其余均不变,

a) 用币值加权方法重新计算收益率。

b) 用时间加权方法不能计算收益率，解释为何不能。

23. 在时刻 0 和时刻 1 分别向一笔投资基金存入 \$1000, 基金在时刻 1 的余额为 \$1200, 在时刻 2 的余额为 \$2200,

a) 用币值加权方法计算年度实质收益率。

b) 计算相当于由时间加权计算产生的年度实质收益率。

24. 设 A 为基金在 1 月 1 日的余额， B 为在 6 月 30 日的余额， C 为在 12 月 31 日的余额。

a) 如果没有存入或抽回，证明由币值加权方法和时间加权方法计算的收益率都等于 $(C-A)/A$ 。

b) 假若在 6 月 30 日余额计算后立即有一单独的储蓄 D, 试求币值加权和时间加权收益率表达式。

c) 假若 b) 中的储蓄发生在恰为 6 月 30 日余额计算之前，重新考察 b) 。

d) (b) 和 (c) 中和币值加权收益率是相等的，试给这一事实以字面上的解释。

e) 证明 (b) 中的时间加权收益率大于 (c) 中的时间加权收益率。

§5.7 投资组合方法与投资年度方法

25. 试由表 5.2 中的数据确定 $\ddot{s}_{\overline{5}|}$, 其中假定第一次付款是在日历年 $z+3$ 。

26. 已知对整数 t, $1 \leq t \leq 5$ 及整数 y, $0 \leq y \leq 10$, $1+i_t^y=(1.08+0.005t)^{1+0.01y}$ 。如果从 $y=5$ 这一年开始的三年内各投资 \$1000, 试确定等价的实质利率。

27. 由建立一个两变量的积累函数来定义一种投资年度方法。设 $a(s,t)$ 为在时刻 s 有一单位的原始投资在时刻 t 的积累值，其中 $0 \leq s \leq t$ 。

a) 用 $a(s,t)$ 表示 $\delta_{s,t}$ 。

b) 用 $\delta_{s,t}$ 表示 $a(s,t)$ 。

c) 用投资组合方法中的 $a(s)$ 和 $a(t)$ 表示 $a(s,t)$ 。

d) 假设有等额的实质利率 i, 求 $a(0,t)$ 。

e) 求 $a(s,t)$ 。

§5.8　资金预算

28. 若一投资者的可接受利率为 12%, 试问习题 4 中的投资是会被接受还是拒绝？

29. 一部旧汽车开价 \$5000 现金，也可先付 \$2400 现金，在以后 2 年中每年之末再付 \$1500 。假如一位购车人的可接受利率为 10%, 问他愿意用现款买还是分期付款？

30. a) 画出例 5.4 中 $P(i)$ 的图形。

b) 若所有收益率均为虚数，你对 $P(i)$ 的图形会作出什么结论？

§5.9　一般借贷模型

31. 一位投资者在考虑是否要作 5.3 节开始的例子中的那笔投资时，对收益率究竟是 10% 还是 20% 感到混淆。为了解决这一混淆，他决定将第 2 年末的投入按照一个利率为 12% 的基金来“预设基金”。

a) 计算在这些条件下这笔业务的收益率。

b) 问 (a) 中的收益率是否唯一？

32. 再次考虑 31 题中的业务，试确定对应于项目投资率为 $r=15\%$ 的项目借贷率 f 。

33. 一个 10 年期投资项目的头 5 年资金流如下：

t	C_t
0	1000
1	2000
2	−4000
3	3000
4	−4000
5	5000

若 $r = 15\%$ 及 $f = 10\%$, 求 B_5 。

杂题

34. 建立一个投资帐户，估计它在今后 20 年内能获利 8% 。如果对每年的利息要征收税率为 25% 的所得税，求在第 20 年末积累利息减少的百分数。

35. 某借款人需要 \$800, 他可以从两种途径得到这笔基金：

(a) 答应在期末归还 \$900 。

(b) 现在借 \$1000, 期末归还 \$1120 。

如果对此时期的可接受利率为 10%, 问愿意选择哪一种？

36. 由一寿险保单所得留归储蓄，利息在每年末支付。受益人在每年 t $(t = 1, 2, \cdots, 10)$ 之末从基金抽回一笔款项。当保单保障的最小利率为 3% 时，相等的年度抽回额将为 \$1000 。然而，保险商在头 4 年提供的利率为 4%, 而其后 6 年为 5% 。在第 t 年末的实际抽回额为

$$W_t = \frac{F_t}{\ddot{a}_{\overline{11-t}|0.03}},$$

其中 F_t 为基金 (包括利息) 在抽回前的金额，试计算 W_{10} 。

37. 一项投资基金在 1 月 1 日的余额为 \$273000; 而在 12 月 31 日的余额为 \$372000 。此年内得到的利息金额为 \$18000, 而此基金的收益率为 6%, 求对此基金的投入与抽回的平均日期。

38. 一项投资基金在时刻 0 从初始存款 1 开始。在以后的 n 年中，新的储蓄在时刻 t 按年率 $1 + t$ 连续存入。在时刻 t 的利息效力为 $\delta_t = (1 + t)^{-1}$, 求基金在第 n 年末的积累值。

第六章　分期偿还表和偿债基金

§6.1　引　言

在第六章中，我们将在比前几章更深的程度上分析偿还贷款的各种方法。特别要讨论两种方法：

分期偿还方法　在此方法中，借款人按一定的周期用分期付款办法偿还贷款。此过程称为“分期偿还”。

偿债基金方法　在此方法中，借款人在贷款期末用一次的集中付款来偿还贷款人。利息则是在此期间分期付款，并假设借款人周期性地付款给一个“偿债基金”，它将在贷款期末积累到应偿还的金额。

第六章还考虑与上述偿还方法相关的下列问题：

1. 如何决定在任何时刻的未偿还贷款余额？

2. 借款人的付款怎样分为对本金的偿还及支付的利息？

6.2 节和 6.3 节将考虑分期偿还方法，而 6.4 节考虑偿债基金方法。其后各节则对这两种方法进行拓展和推广。

§6.2　确定未偿还贷款余额

如果一项贷款是用分期偿还的方法来还款的话，那些分期支付的款项就构成了一项年金，其现时值等于贷款的原始金额。6.2 节就是要决定从贷款开始之日起任何时刻的未偿还贷款余额。读者将会遇到一些与常用的“未偿还贷款余额”同义的术语，其中有“未偿还本金”及“余留贷款债务”等。

确定未偿还贷款余额在实践中十分重要。例如，若一个家庭以 30 年抵押贷款来购买一所房子。在已付 12 年抵押款后，如要

一次完全付清抵押款，应付多少？

确定未偿还贷款余额有两种方法，即将来法和过去法。这两个名词取得很合适，因为将来法在计算未偿还贷款余额时是面向将来的；而过去法则是面向过去的。

按照将来法，任何时刻的未偿还贷款余额，等于余下的付款在这一天的现时值。按照过去法，任何时刻的未偿还贷款余额，等于原始贷款金额积累到这一天的值减去所有已付的款项在这一天的积累值。

可以证明，一般说来将来法与过去法是等价的。在贷款开始的日子有下列等式

$$\text{所有付款的现时值} = \text{贷款金额}$$

现在将此方程的两端积累到需要计算未偿还贷款余额的那一天，就得到

$$\text{所有付款的当前值} = \text{贷款的积累值}$$

然而，所有的付款可分成过去和将来两部分：

$$\text{过去付款的积累值} + \text{将来付款的现时值} = \text{贷款的积累值}$$

今重新排列，就有

$$\text{将来付款的现时值} = \text{贷款的积累值} - \text{过去付款的积累值}$$

或

$$\text{将来法} = \text{过去法}$$

我们将使用第五章中建立的符号，并记在时刻 t 的未偿还贷款余额为 B_t 。为了帮助使用此符号，我们可记将来形式为 B_t^p 及过去形式为 B_t^r 。然而，上标 p 和 r 是否使用是可选择的。原始余额 B_0 则记为 L 。

在特定场合可以从代数上证明将来法等于过去法。例如，考虑一笔每时期利率为 i 的贷款 $a_{\overline{n}|}$, 它用在 n 个时期内每时期末付款 1 来偿还。要计算自贷款开始之日起 t 个时期后的未偿还贷款余额，其中 $0 < t < n$ 。这里时刻 t 的未偿还贷款余额是在第 t 次付款后计算的。

将来法给出

$$B_t^p = a_{\overline{n-t}|}. \tag{6.1}$$

而过去法给出

$$B_t^r = a_{\overline{n}|}(1+i)^t - s_{\overline{t}|}. \tag{6.2}$$

可以证明过去形式等于将来形式

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}(1+i)^t - s_{\overline{t}|} &= \frac{1-v^n}{i}(1+i)^t - \frac{(1+i)^t - 1}{i} \\
&= \frac{(1+i)^t - v^{n-t} - (1+i)^t + 1}{i} \\
&= \frac{1-v^{n-t}}{i} \\
&= a_{\overline{n-t}|}.
\end{aligned}$$

对任何给出的问题，将来法或过去法哪个更有效依赖于问题的性质。如果付款的数额与次数都知道，则将来法通常更有效。如果付款的次数或最后一笔非正规支付的金额不知道，则过去法常常更有效。

例 6.1　一笔贷款以 10 次 \$2000 的付款继之以 10 次 \$1000 的付款来偿还，付款时间为每半年之末。若半年转换的名义利率为 10%, 试用将来法与过去法求恰付款五次后的未偿还贷款余额。

1. 利率为每半年 5%, 由将来法，未偿还贷款余额为

$$B_5^p = 1000(a_{\overline{15}|} + a_{\overline{5}|}) = 1000(10.3797 + 4.3295) = \$14,709.$$

2. 原始贷款为

$$L = 1000(a_{\overline{20}|} + a_{\overline{10}|}) = 1000(12.4622 + 7.7217) = \$20184,$$

算到元为止。由过去法，未偿还贷款余额为

$$\begin{aligned} B_5^r &= 20184(1.05)^5 - 2000s_{\overline{5}|} \\ &= 20184(1.27628) - 2000(5.5256) \\ &= \$14709, \end{aligned}$$

算到元为止。这样将来法与过去法答案相同。

例 6.2　一笔贷款通过 20 次每次 \$1000 的年度付款来偿还。在第五次付款时，借款人想加付 \$2000, 并将余额在今后 12 年内以修正的年度付款来付清。若实质利率为 9%, 求修正年度付款的金额。

由将来法，5 年后的余额为

$$B_5^p = 1000a_{\overline{15}|} = 1000(8.0607) = \$8060.70.$$

如借款人加付 \$2000, 则余额成为 \$6060.70 。对于用 X 记的修正付款额的求值方程为

$$Xa_{\overline{12}|} = 6060.70$$

或

$$X = \frac{6060.70}{7.1607} = \$846.38.$$

§6.3　分期偿还表

如果一笔贷款是用分期偿还方法来还款的，则每一次付款中有一部分是还本金，而另一部分是付利息。 6.3 节就是要讨论每次付款怎样分成本金和利息两部分。

确定每次付款中本金和利息的金额对于借款人和贷款人都是重要的。例如，在征收所得税时本金和利息就常常作不同处理。

分期偿还表 是这样一张表，它显示每次付款如何划分为本金和利息两部分。还显示每次付款后的未偿还贷款余额。考虑一笔利率为每时期 i 的贷款 $a_{\overline{n}|}$，它以在 n 个时期内每个时期末付款 1 来偿还。表 6.1 为这种情况的分期偿还表。

表 6.1　一项在 n 个时期内以利率 i 偿还的贷款 $a_{\overline{n}|}$ 的分期偿还表

时期	付款金额	支付的利息
0		
1	1	$ia_{\overline{n}\|} = 1 - v^n$
2	1	$ia_{\overline{n-1}\|} = 1 - v^{n-1}$
⋮	⋮	⋮
t	1	$ia_{\overline{n-t+1}\|} = 1 - v^{n-t+1}$
⋮	⋮	⋮
$n-1$	1	$ia_{\overline{2}\|} = 1 - v^2$
n	1	$ia_{\overline{1}\|} = 1 - v$
总计	n	$n - a_{\overline{n}\|}$

时期	偿还的本金	未偿还贷款余额
0		$a_{\overline{n}\|}$
1	v^n	$a_{\overline{n}\|} - v^n = a_{\overline{n-1}\|}$
2	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}\|} - v^{n-1} = a_{\overline{n-2}\|}$
⋮	⋮	⋮
t	v^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t+1}\|} - v^{n-t+1} = a_{\overline{n-t}\|}$
⋮	⋮	⋮
$n-1$	v^2	$a_{\overline{2}\|} - v^2 = a_{\overline{1}\|}$
n	v	$a_{\overline{1}\|} - v = 0$
总计	$a_{\overline{n}\|}$	

考虑贷款的第一个时期。在第一时期末，应付给本时期初余额的利息为 $ia_{\overline{n}|} = 1 - v^n$ 。因而总付款 1 中的余下部分，即 v^n，必定是偿还的本金。本时期末的未偿还贷款余额应等于本时期初的未偿还贷款余额减去偿还的本金，即 $a_{\overline{n}|} - v^n = a_{\overline{n-1}|}$ 。本表中相继各行也应用同样的推理。

还可以看到其他几点。首先，应当注意未偿还贷款余额与用将来法在公式 (6.1) 中得到者一致。其次，偿还本金之和等于原始贷款金额。第三，所付利息之和等于付款总额与偿还本金之差。第四，偿还本金形成一个公比为 $1+i$ 的几何级数。这样，如要确定任何一次偿还的本金值，只要知道任何另一次偿还本金及利率就可以了。

下面可以来更深入地看一看分期偿还表的本质。原始的贷款余额 $a_{\overline{n}|}$ 在第一时期之末将积累到 $a_{\overline{n}|}(1+i)=\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 。然而 $\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+a_{\overline{n-1}|}$，也就是说，$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 足够给出年度付款 1，并在第一时期末留下一笔未偿还贷款余额 $a_{\overline{n-1}|}$ 。分期偿还表的其他依次各行也都按照同样的推理。

为方便起见，我们将把第 t 次分期付款中支付的利息金额记为 I_t，而同一分期付款中偿还的本金金额则记为 P_t 。于是对表 6.1 中所给出的分期偿还表有

$$I_t=1-v^{n-t+1} \tag{6.3}$$

及

$$P_t=v^{n-t+1}. \tag{6.4}$$

读者应注意在第一章中也曾在不同的意义上用过 I_t 这一符号。然而，在这两种情形下此符号都是表示在时刻 $t-1$ 到时刻 t 之间赚得的利息金额，所以混淆的风险是小的。最后，我们将分期付款金额记为 R 。

应该指出，表 6.1 是基于原始贷款为 $a_{\overline{n}|}$ 。如果原始贷款为其他金额，则表中的所有数值均应按比例增减。例如，若原始贷款为 \$1000，则表中的后四列每一个数都应乘上 $1000/a_{\overline{n}|}$ 。

对于一个特定问题，分期偿还表可以根据基本原理来构造。例如，若有一笔 \$1000 的贷款，年实质利率为 8%，由四次年度付

款来偿还，试构造其分期偿还表。则有

$$R = \frac{1000}{a_{\overline{4}|}} = \frac{1000}{3.3121} = \$301.92.$$

表 6.2 是这个例子的分期偿还表。

表 6.2　$1000 贷款在四年内以 8% 利率偿还的分期偿还表

年	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				1000.00
1	301.92	80.00	221.92	778.08
2	301.92	62.25	239.67	538.41
3	301.92	43.07	258.85	279.56
4	301.92	22.36	279.56	0

在表 6.2 的第一行中有下列计算。包含在第一次付款中的利息是

$$I_1 = i \cdot B_0 = 0.08(1000) = \$80.00.$$

包含在第一次付款中的本金是

$$P_1 = R - I_1 = 301.92 - 80.00 = \$221.92.$$

第一年末的未偿还贷款余额为

$$B_1 = B_0 - P_1 = 1000.00 - 221.92 = \$778.08.$$

此表中相继各行也可类似地计算。

在上面这个例子中最后一行是精确地平衡的。然而，在大多数情形下可能会积累一个舍入误差，如果是这样，则标准的做法是适当调整最后一次付款，使它精确地等于最后一个时期的利息金额加上在最后一个时期之初 (即倒数第二个时期之末) 的未偿还贷款余额。这样的调整将使在整个贷款时期之末的未偿还贷款余额精确为零。

也可以用另一种利用表中各种关系的方法来构造分期偿还表。作为一个例子，可以象在 6.2 节中那样计算未偿还贷款余额的各个值，分期偿还表中的其余部分就可由这些值来推出。第二个例子是偿还本金这一列可以利用下列事实来计算：逐次的值构成一几何级数，分期偿还表的其余部分可由这些值导出。

应该注意，如果仅要确定一次特定付款中本金和利息的金额，并不一定要构造整个分期偿还表。在问题中时期之初的未偿还贷款余额，可由 6.2 节中的方法确定，然后就可以计算分期偿还表的一行。

读者可能会对永久年金的分期偿还表感到困惑。很清楚，对于永久年金来说，整个付款表示利息，而未偿还贷款余额则保持不变。这样，对于永久年金用分期偿还的说法在术语上是有矛盾的。

在以上关于分期偿还表的讨论中隐含着几个假设。首先是假设利率为常数。在习题中将考虑利率变化的分期偿还表。其次是假定年金支付时期与利息转换时期为一致。在 6.5 节中将讨论两者不一致的情况。第三个假设是年金支付是等额的，在例 6.3 和习题中将考虑除最后一个时期有非正规支付外，其他时期为等额支付的情形，存在一系列变额支付的更一般情形将在 6.6 节中讨论。

在第八章中将更详细地讨论某种特殊的贷款业务。特别是，在 8.3 节中将考虑房地产抵押贷款。在 8.3 节中考虑的一种重要的新型抵押贷款是可调整利率的抵押贷款。这种抵押包含着第六章中未考虑到的一些特点。

例 6.3　一笔 \$1000 的贷款用这样的方式偿还：每季度末偿还 \$100，一直支付到连同最后一次较小付款还清贷款为止。如果季度转换的名义利率为 16%，试确定第四次付款中本金和利息的金额。

第四季度始 (即第三季度末) 的未偿还贷款余额为

$$B_3^r = 1000(1.04)^3 - 100s_{\overline{3}|} = 1124.86 - 312.16 = \$812.70.$$

第四次付款中得到的利息为

$$I_4 = 0.04(812.70) = \$32.51.$$

第四次付款中得到的本金为

$$P_4 = 100.00 - 32.51 = \$67.49.$$

注意，为解此例不一定要找出较小的最后付款的时期与金额。

例 6.4　A 向 B 借款 \$10000, 言明在 6 年内以分期季度等额付款 (本金和利息) 来偿还，利率为季度转换 8% 。在第二年之末， B 将收取未来付款的权利转让给 C, 转让价产生季度转换 10% 的收益率。试确定 (1) 由 C, (2) 由 B 收取的利息总量。

1. A 所支付的分期季度付款为

$$\frac{10000}{a_{\overline{24}|0.02}} = \frac{10000}{18.9139} = \$528.71.$$

C 付出的价格为

$$528.71a_{\overline{16}|0.025} = (528.71)(13.0550) = \$6902.31.$$

A 在最后四年内付出的总额为

$$(16)(528.71) = \$8459.36.$$

这样， C 收到的总利息为

$$8459.36 - 6902.31 = \$1557.05.$$

2. 在第二年之末，在 B 的原始分期偿还表上的未偿还贷款余额为

$$528.71a_{\overline{16}|0.02} = (528.71)(13.5777) = \$7178.67.$$

A 在头两年的付款总金额为

$$(8)(528.71) = \$4229.68.$$

在此期间 A 偿还的本金为

$$10000 - 7178.67 = \$2821.33.$$

这样， B 收到的利息总额应为

$$4229.68 - 2821.33 = \$1408.35.$$

然而， A 在整个贷款期间所付的总利息为

$$(24)(528.71) - 10000 = \$2689.04,$$

它不等于 C 和 B 收到的利息额之和。即不等于

$$1557.05 + 1408.35 = \$2965.40.$$

所发生的事情是： B 在第二年末遭到了损失，其金额为未偿还贷款余额与出售给 C 的价格之差，即

$$7178.67 - 6902.31 = \$276.36.$$

如果将这笔损失从 B 收到的利息中扣除，则 B 在这笔业务中的投资净收入为

$$1408.35 - 276.36 = \$1131.99.$$

这一系统现在平衡了，因为将此金额加到 C 收到的利息上去，就等于 A 付出的利息，即

$$1557.05 + 1131.99 = \$2689.04.$$

例 6.5　一笔款项以年度实质利率 i 进行投资，它恰恰够在 n 年内每年末付款 1 。在第 1 年中基金确实有利率 i 并在年末付款 1 。但在第 2 年中基金的利率变为 j, 其中 $j > i$ 。试在以下两种假定下分别确定在第 2 至第 n 年末应付款项的修正值：(1) 假定利率在过了第 2 年后再次回复到 i, (2) 假定利率在整个 n 年投资期间的其余年份中保持为 j 。

1. 初始投资为 $B_0 = a_{\overline{n}|i}$, 在第 1 年末的帐户余额为 $B_1 = a_{\overline{n-1}|i}$ 。设 X 为修正后的付款。现在在修正的基础上构造分期偿还表的第二行，得到

$$\begin{aligned} I_2 &= ja_{\overline{n-1}|i}, \\ P_2 &= X - ja_{\overline{n-1}|i} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} B_2 &= a_{\overline{n-1}|i} - (X - ja_{\overline{n-1}|i}) \\ &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i} - X. \end{aligned}$$

然而，预期 B_2 必须等于所有付款的现时值。这样，我们就有

$$\begin{aligned} (1+j)a_{\overline{n-1}|i} - X &= Xa_{\overline{n-2}|i}, \\ X(1 + a_{\overline{n-2}|i}) &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i}, \\ X\ddot{a}_{\overline{n-1}|i} &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i}, \\ X(1+i)a_{\overline{n-1}|i} &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i}. \end{aligned}$$

由此

$$X = \frac{1+j}{1+i}.$$

2. 方法与情形 1 相同，只是未来付款的预期值 (等于 B_2) 是以利率 j 而不是 i 计算的。这样就有

$$\begin{aligned}(1+j)a_{\overline{n-1}|i} - X &= Xa_{\overline{n-2}|j},\\ X(1+a_{\overline{n-2}|j}) &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i},\\ X\ddot{a}_{\overline{n-1}|j} &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i},\\ X(1+j)a_{\overline{n-1}|j} &= (1+j)a_{\overline{n-1}|i}.\end{aligned}$$

它给出

$$X = \frac{a_{\overline{n-1}|i}}{a_{\overline{n-1}|j}}.$$

§6.4 偿债基金

借款人在偿还一笔贷款时，也可以不用分期偿还方法，而用在一规定时期之末的一次集中付款来偿还。在许多这样的情况下，借款人要积累一笔基金，此基金足够在规定时期之末精确地偿还贷款。事实上，在某些场合下，贷款人会坚持要借款人积累这样一笔基金，它称为 *偿债基金* 。

在某些场合下，向偿债基金付款会由于借款人的判断而有不规则的变化。然而，我们将主要关心那些按正规形式付款的情形，也就是那种年金的形式。

经常需要借款人在整个贷款期间周期性地支付利息，这种利息有时称为贷款的 *服务费* 。这样，贷款金额保持为常数。

因为偿债基金的余额在任何时刻可以被用来偿还贷款，故贷款的净金额等于原始贷款金额减去偿债基金的积累值。这一概念在偿债基金方法中所起的作用与未偿还贷款余额在 6.2 节的分期偿还方法中所起的作用相同。

可以证明，如果贷款中支付的利率与偿债基金所得的利率相等，则偿债基金方法等价于分期偿还方法。

回忆公式 (3.6)

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i. \tag{3.6}$$

考虑一笔金额为 1 的贷款，在 n 个时期内偿还。表示式 $1/a_{\overline{n}|}$ 是在分期偿还方法中需要偿还的每次付款金额。然而，$1/s_{\overline{n}|}$ 是在偿债基金中为在 n 个时期末积累到贷款金额所需的周期性存款，而 i 则是贷款中每个时期应支付的利息。这样，两种方法是等价的。

从另一角度来看一下这种等价性也是很有意思的。考虑一项金额为 $a_{\overline{n}|}$ 的贷款，它由 n 个时期中每时期末付款 1 来分期偿还。每个时期的利息金额为 $ia_{\overline{n}|}$。这样，每个时期留下 $1-ia_{\overline{n}|}$ 进入偿债基金。偿债基金将积累到

$$(1-ia_{\overline{n}|})s_{\overline{n}|}=v^n s_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|},$$

它就是原始的贷款金额。

初看起来，这两种方法好象不能等价，因为按表 6.1, 用分期偿还方法支付的利息是按 $1-v^n, 1-v^{n-1}, \cdots, 1-v$ 递减的；而偿债基金中所支付的利息为每时期 $ia_{\overline{n}|}=1-v^n$, 这是常数。然而，每个时期偿债基金获得的利息恰好抵消了这种看上去的差别，故偿债基金方法和分期偿还方法得到的净利息金额是相等的。

例如，在第 t 个时期 $(1\le t\le n)$, 分期偿还表中的利息金额为

$$ia_{\overline{n-t+1}|}=1-v^{n-t+1}.$$

偿债基金方法中利息净金额为所支付利息金额 $ia_{\overline{n}|}$ 减去偿债基金所赚得的利息金额。偿债基金金额为偿债基金储蓄 $1-ia_{\overline{n}|}$ 在 $t-1$ 个时期之末的积累值，即

$$(1-ia_{\overline{n}|})s_{\overline{t-1}|}.$$

如此则偿债基金方法在第 t 个时期的净利息金额为

$$\begin{aligned} ia_{\overline{n}|} - i(1 - ia_{\overline{n}|})s_{\overline{t-1}|} &= (1 - v^n) - v^n[(1+i)^{t-1} - 1] \\ &= 1 - v^n - v^{n-t+1} + v^n \\ &= 1 - v^{n-t+1}. \end{aligned}$$

于是，如果贷款利率与偿债基金所得利率相等，则偿债基金方法中的净利息金额等于分期偿还方法中的利息金额。

两种方法的等价性也可从考虑一种 *偿债基金表* 而见到。

表 6.3 是表 6.2 中例子的偿债基金表。设记偿债基金储蓄为 D, 则有

$$D = \frac{1000}{s_{\overline{4}|}} = \frac{1000}{4.5061} = \$221.92.$$

请读者校核一下表 6.3 中的各项。

表 6.3　4 年内以 8% 利率偿还 $1000 贷款的偿债基金表

年份	支付利息	偿债基金储蓄	偿债基金所得利息	偿债基金金额	贷款净金额
0					1000.00
1	80.00	221.92	0	221.92	778.08
2	80.00	221.92	17.75	461.59	538.41
3	80.00	221.92	36.93	720.44	279.56
4	80.00	221.92	57.64	1000.00	0

应当注意表 6.2 和表 6.3 之间的下列关系：

1. 偿债基金方法中的付款总数，即付给贷款的利息加上偿债基金储蓄，等于分期偿还方法中的付款金额。

2. 偿债基金方法中支付的净利息，即对贷款所付的利息减去偿债基金所得利息，等于分期偿还方法所付利息。

3. 偿债基金的年度增长，即偿债基金储蓄加上偿债基金得到的利息，等于分期偿还方法偿付的本金。

4. 偿债基金方法中贷款净金额，即原始贷款金额减去偿债基金的金额，等于分期偿还方法中的未偿还贷款余额。

现在还余下要讨论当偿债基金所得利率与贷款利率不同时，偿债基金方法将如何运作。记贷款利率为 i，而偿债基金利率为 j。

在实践中 j 经常小于或等于 i。借款人倘能在偿债基金中以高于贷款利率的利率积钱，那将是很不平常的。但此假设在数学上是不必要的，以下的分析甚至对 j 大于 i 的情形也是成立的。

在 $i \neq j$ 时，我们将使用的基本方法与前面 $i = j$ 时所用的方法是一样的。付款总额将也分为两部分。首先，按照贷款金额支付利率为 i 的利息。其次，付款总额中不需作为利息的余下部分则留置偿债基金中以利率 j 积累。

今用 $a_{\overline{n}|i\&j}$ 表示这样一项年金的现时值，此年金共经历 n 个时期，在每个时期之末付 1，利率条件即如上述。这样，假如有一笔金额为 1 的贷款，它在分期偿还方法下的每次周期性分期付款应为 $\frac{1}{a_{\overline{n}|i\&j}}$。然而，按照偿债基金方法，这一付款必须既按利率 i 给贷款支付利息，又要提供偿债基金储蓄，使它能按利率 j 在 n 个时期之末积累到贷款的金额。故有

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i\&j}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} + i. \tag{6.5}$$

现在就可以找到 $a_{\overline{n}|i\&j}$ 的如下表达式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{\overline{n}|i\&j}} &= \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} + i \\ &= \frac{1}{a_{\overline{n}|j}} + (i - j). \end{aligned} \tag{6.6}$$

于是

$$a_{\overline{n}|i\&j} = \frac{a_{\overline{n}|j}}{1 + (i - j)a_{\overline{n}|j}}. \tag{6.7}$$

应该注意当 $i=j$ 时， $a_{\overline{n}|i\&j}=a_{\overline{n}|i}$, 这正符合预期。

有两种利率的偿债基金表的构造同只有一种利率的偿债基金表的构造非常相似。例如，考虑一笔为期 4 年的 \$1000 的贷款，其年实质利率为 10% 。而借款人是通过 4 次年度的偿债基金储蓄来积累到足以还款，这些储蓄有 8% 的年实质利率。借款人的年度付款应为

$$\frac{1000}{a_{\overline{4}|.10\&0.08}}=\frac{1000}{s_{\overline{4}|0.08}}+1000(0.10)=221.92+100.00=\$321.92.$$

这个例子是表 6.3 中例子的推广。注意偿债基金表同表 6.3 几乎是完全一样，只是支付利息这一列的每一个数据是 \$100 而不是 \$80 。

一般说来，有两种利率的偿债基金表都是同只有一种利率 (即贷款利率等于偿债基金利率) 的偿债基金表几乎完全一样，只是支付利息这一列要加上一个 $(i-j)$ 乘上贷款金额的常数。

例 6.6　A 想借款 \$1000, 贷款人 B 提出的贷款条件是本金应在第 4 年末归还。同时需按 10% 的实质利率支付利息。 A 应通过每年向一偿债基金存款来积累还款的金额，此基金有 8% 的实质利率。贷款人 C 提供一种在 4 年内按分期偿还方法还款的贷款条件。问 C 所开价的实质利率最大可以为多少，才能使 A 面临的两种方案并无差别？

按任何一种方案 A 都要在每年年底作出 4 次等额的付款以偿还贷款。如果两者的年度付款相同，则两种方案就没有差别。

在 B 提供的偿债基金方法中，年度付款为本节前面所示

$$\frac{1000}{a_{\overline{4}|0.10\&0.08}}=\$321.92.$$

这样，在分期付款方法中， C 可以开价的利率为 i, 使

$$321.92a_{\overline{4}|i}=1000$$

或

$$a_{\overline{4}|i} = 3.1064.$$

我们用 3.8 节中给出的迭代方法来解这项年金的未知利率，可使用 (3.29) 式以得到迭代的初始值

$$i_0 = \frac{2(n-k)}{k(n+1)} = \frac{2(4-3.1064)}{(3.1064)(5)} = .1151.$$

逐次应用 Newton —Raphson 迭代公式 (3.28) 就得

$$\begin{aligned} i_1 &= 0.1093, \\ i_2 &= 0.1094, \\ i_3 &= 0.1094. \end{aligned}$$

故 C 可开价的实质利率为 10.94% 。

实质上我们已证明了

$$a_{\overline{4}|0.10\&0.08} = a_{\overline{4}|0.1094}.$$

这一例子告诉我们，对借款人来说最主要的是周期性付款的总金额，至于分期偿还方法与偿债基金方法的差别可以说是人为的。

读者可能会对答案是 .1094 感到奇怪，因为也许会预期答案应介于 .08 与 .10 之间。一般说来，如果分期偿还方法中的等价利率记为 i', 则有下列近似等式：

$$i' \doteq i + \frac{1}{2}(i - j).$$

这一公式在此例中会产生一个等于 $.10 + \frac{1}{2}(0.10 - 0.08) = 0.11$ 的答案，它很接近于真实答案 .1094 。

等价利率 i' 大于 i, 因为借款人不仅要为所借的每一元钱付利息 i, 而且还要投资于偿债基金，其中的利息损失率为 $i - j$ 。

因为偿债基金中所借每一元钱的平均金额为 1/2, 所以超过的利息近似为 $\frac{1}{2}(i-j)$ 。这样，所借每一元钱的总利息近似为

$$i+\frac{1}{2}(i-j).$$

考虑一下 B 在这笔业务中的收益率也很有意思。如果 A 是投资于 B 的偿债基金，则 B 在这 4 年期间的贷款收益率应与 A 所付代价相同，即 10.94%, 但假如 A 是投资于别人的偿债基金，则 B 的收益率正好是 10% (不考虑再投资率) 。这样， B 的总体收益率受到 B 是否持有偿债基金这一好处的影响，在此基金中利率只有 8% 。

例 6.7　一位投资者以某价格购买了一项按利率 8% 现时值为 \$1000 的 n 年期年金。此价格允许将原始投资替换为一项有 7% 利率的偿债基金，而获得 9% 的总体收益率。求此年金的购买价格。

此项年金的年度付款为

$$\frac{1000}{a_{\overline{n}|0.08}}.$$

设 P 为购买价，而 D 为偿债基金储蓄。每年度总付款分解为两部分：一部分是购买价的利息 $.09P$, 另一部分是偿债基金储蓄 D 。这样就有

$$D=\frac{1000}{a_{\overline{n}|0.08}}-0.09P.$$

然而，我们知道偿债基金经 n 年后的积累值应为 P, 故有

$$P=DS_{\overline{n}|0.07}.$$

从而有两个未知量的两个方程，可得

$$P=\left[\frac{1000}{a_{\overline{n}|0.08}}-0.09P\right]s_{\overline{n}|0.07}$$

或

$$P = \frac{1000 s_{\overline{n}|0.07}}{a_{\overline{n}|0.08}(1 + 0.09 s_{\overline{n}|0.07})}.$$

§6.5 支付期不同于利息转换期

在 6.3 节和 6.4 节中均假设支付期和利息转换期相等且一致。6.5 节中将考虑去掉此假设的情况。首先将分析支付频率与利息转换频率不同的分期偿还表。

首先考虑一项贷款 $a_{\overline{n}|}/s_{\overline{k}|}$，它以在总共 n 个利息转换时期中每 k 个时期之末付款 1 来偿还。付款次数为 n/k，它是整数。表 6.4 是表 6.1 在这种情况下的推广。请读者校核表 6.4 中的各项。

其次考虑一项贷款 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$，它在总共 n 个利息转换时期中，以每 $\frac{1}{m}$ 利息转换时期之末付款 $1/m$ 来偿还。付款的次数是 mn，它是整数。表 6.5 是表 6.1 在这种情况下的推广，请读者校核表 6.5 中的各项。

在 6.3 节中对分期偿还表所作的考虑也可应用于本节的分期偿还表。希望读者不要依赖于硬背分期偿还和偿债基金表中的那些公式，因为构造这些表所用的推理才是最重要的。任何分期偿还或偿债基金表都可以根据基本原理构造出来。

在偿债基金的情况下方法也是类似的，不过情况要更复杂一些，因为下列各频率均可能不同：(1) 贷款利息的支付，(2) 偿债基金储蓄，以及 (3) 偿债基金的利息转换。

包含有不同频率的偿债基金的情形可以通过基本原理来处理。例 6.8 就是这种情况的一个例子。

例 6.8　一位借款人取得一笔为期 2 年的 \$2000 的贷款。如果贷款人收取 10% 的实质利率，且借款人用向一个具有 8% 季度转换利率的偿债基金作每半年度的储蓄以归还这笔贷款，试构造偿债基金表。

表 6.4　付款频率小于利息转换频率的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息
0		
k	1	$[(1+i)^k-1]\frac{a_{\overline{n}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}=1-v^n$
$2k$	1	$[(1+i)^k-1]\frac{a_{\overline{n-k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}=1-v^{n-k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
tk	1	$[(1+i)^k-1]\frac{a_{\overline{n-(t-1)k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}=1-v^{n-(t-1)k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	1	$[(1+i)^k-1]\frac{a_{\overline{2k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}=1-v^{2k}$
n	1	$[(1+i)^k-1]\frac{a_{\overline{k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}=1-v^k$
总额	$\frac{n}{k}$	$\frac{n}{k}-\frac{a_{\overline{n}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$

时期	偿还本金	未偿还贷款余额
0		$\frac{a_{\overline{n}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$
k	v^n	$\frac{a_{\overline{n}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}-v^n=\frac{a_{\overline{n-k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$
$2k$	v^{n-k}	$\frac{a_{\overline{n-k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}-v^{n-k}=\frac{a_{\overline{n-2k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
tk	$v^{n-(t-1)k}$	$\frac{a_{\overline{n-(t-1)k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}-v^{n-(t-1)k}=\frac{a_{\overline{n-tk}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	v^{2k}	$\frac{a_{\overline{2k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}-v^{2k}=\frac{a_{\overline{k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}$
n	v^k	$\frac{a_{\overline{k}\vert}}{s_{\overline{k}\vert}}-v^k=0$
总额		

在本例情形下所有频率均不同：(1) 付给贷款的利率是每年一次，(2) 偿债基金储蓄是每半年一次，(3) 偿债基金中的利息是每季度转换一次。

对贷款支付的利息是每年末 \$200 。设偿债基金储蓄额为 D，则

表 6.5　支付频率大于利息转换频率的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息
0		
$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n}\mid}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^n)$
$\frac{2}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{n-\frac{1}{m}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{t}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n-\frac{t-1}{m}}\mid}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{n-\frac{t-1}{m}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{\frac{2}{m}}\mid}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{\frac{2}{m}})$
n	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{\frac{1}{m}})$
总额	n	$n-a_{\overline{n}\mid}^{(m)}$

时期	偿还本金	未偿还贷款余额
0		$a_{\overline{n}\mid}^{(m)}$
$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}v^n$	$a_{\overline{n}\mid}^{(m)}-\frac{1}{m}v^n=a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}}$	$a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}}=a_{\overline{n-\frac{2}{m}}\mid}^{(m)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{t}{m}$	$\frac{1}{m}v^{n-\frac{t-1}{m}}$	$a_{\overline{n-\frac{t-1}{m}}\mid}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{n-\frac{t-1}{m}}=a_{\overline{n-\frac{t}{m}}\mid}^{(m)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}$	$a_{\overline{\frac{2}{m}}\mid}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}=a_{\overline{\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}$
n	$\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}$	$a_{\overline{\frac{1}{m}}\mid}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}=0$
总额	$a_{\overline{n}\mid}^{(m)}$	

$$D\frac{s_{\overline{8}\mid 0.02}}{s_{\overline{2}\mid 0.02}}=2000$$

或

$$D=2000\frac{s_{\overline{2}\mid 0.02}}{s_{\overline{8}\mid 0.02}}=2000\frac{2.02}{8.5830}=\$470.70.$$

偿债基金表见表 6.6

表 6.6　例 6.8 中的偿债基金表

年份	支付利息	偿债基金储蓄	偿债基金所得利息	偿债基金金额	净贷款金额
0					
$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	2000.00
$\frac{1}{2}$	0	470.70	0	470.70	1529.30
$\frac{3}{4}$	0	0	9.41	480.11	1519.89
1	200. 00	470.70	9.60	960.41	1039.59
$1\frac{1}{4}$	0	0	19.21	979.62	1020.38
$1\frac{1}{2}$	0	470.70	19.59	1469.91	530.09
$1\frac{3}{4}$	0	0	29.40	1499.31	500.69
2	200.00	470.70	29.99	2000.00	0

例 6.9　一项债务按年实质利率 11% 的月度付款来分期偿还。如果第 3 次付款中的本金金额为 \$1000, 试确定第 33 次付款中的本金金额。

在表 6.5 中偿还本金一列是一个具有公比 $(1+i)^{1/m}$ 的几何级数。从第 3 次付款到第 33 次付款的时段为 $(33-3)/12=2.5$ 年。这样，第 33 次付款中的本金为

$$1000(1.11)^{2.5} = \$1298.10.$$

§6.6　变额支付序列

在用分期偿还方法偿还贷款时，借款人可能用不等额的分期付款来偿还。在 6.3 节中曾经讨论过除最后一次非正规付款以外其余各次付款均为等额的情形。本节中我们将考虑更一般的变化形式。在此假设利息转换时期与支付时期为相等且一致。

考虑一项由 n 次周期性分期付款 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 来偿还的贷款 L 。则有

$$L = \sum_{i=1}^{n} v^t R_t. \tag{6.8}$$

支付序列 R_t 常取某些正规形式，这样 4.6 节中的一些结果就可以应用。

如果需要构造分期偿还表，可以象 6.3 节中那样按基本原理来构造。另一方面，未偿还贷款余额这一列，可象 6.2 节那样用将来法或过去法确定，随后支付利息和偿还本金这两列也能得到。

有一种相当常见的变化形式是借款者支付等额的本金。由于未偿还贷款余额逐次递减，故支付的利息也将逐次递减。这样，由本金和利息共同组成的总付款将逐次递减。例 6.12 就是一个这样的例子。

当一项贷款以变额支付分期偿还时，在一次付款中应付的利息有可能大于付款总额。在这种情形下，偿还的本金将为负值，而未偿还贷款余额将增加而不是减少。这种未偿还贷款余额的增加当利息缺额 *本金化* 并加到贷款金额中去时是会出现的。这种情形常称为 *负分期偿还* 。例 6.13 是一个这样的例子。

偿债基金方法也可以有变额支付序列。在此我们假定每个时期付给贷款人的利息是常数，这样只有偿债基金储蓄会变化。

假设借款人作出的变额支付为 $R_1, R_2, \cdots R_n$，且 $i \neq j$ 。记贷款金额为 L 。则第 t 个时期的偿债基金储蓄额是 $R_t - iL$ 。因为偿债基金在第 n 个时期末的积累值必须为 L，故有

$$
\begin{aligned}
L &= (R_1 - iL)(1+j)^{n-1} + (R_2 - iL)(1+j)^{n-2} \\
&\quad + \cdots + (R_n - iL) \\
&= \sum_{t=1}^{n} R_t(1+j)^{n-t} - iLs_{\overline{n}|j}.
\end{aligned}
$$

或

$$
L = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t(1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n}|j}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} v_j^t R_t}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}. \qquad (6.9)
$$

如果 $R_t = 1$，则 (6.7) 式可由 (6.9) 式得到。如果 $i = j$，则

(6.9) 式变为

$$L = \sum_{t=1}^{t} v^t R_t,$$

它就是 (6.8) 式。这样，当 $i = j$ 时分期偿还方法与偿债基金方法是等价的。

应该注意，前面实际上已假设偿债基金储蓄 $R_t - iL$ 为正。如果它为负，这就意味着这一年的付款甚至连支付贷款利息也不够。这样，偿债基金就有了负储蓄，即在这一年从偿债基金中抽回款项。例 6.14 就是这样的一个例子。

例 6.10　一位借款人在 10 年内以每年末付款来偿还一笔实质利率为 5% 的贷款，其第 1 年付款为 \$200, 第 2 年为 \$190, 如此下去直到第 10 年为 \$110 。(1) 求贷款金额，(2) 求第 5 次支付的本金与利息。

1. 贷款金额为

$$L = 100a_{\overline{10|}} + 10(Da)_{\overline{10|}} = 100(7.7217) + 10\frac{10 - 7.7217}{0.05} = \$1227.83.$$

2. 我们有

$$\begin{aligned} R_5 &= 160.00, \\ B_4^p &= 100a_{\overline{6|}} + 10(Da)_{\overline{6|}}, \\ I_5 &= iB_4^p = 100(1 - v^6) + 10(6 - a_{\overline{6|}}) \\ &= 100(1 - 0.74622) + 10(6 - 5.0757) = \$34.62, \\ P_5 &= R_5 - I_5 = 160.00 - 34.62 = \$125.38. \end{aligned}$$

例 6.11　假设付款形式与例 6.10 相同，借款人向贷款支付实质利率为 6% 的利息，并积累实质利率为 5% 的偿债基金以偿还贷款金额，求贷款金额。

由 (6.9) 式贷款金额为

$$\frac{100a_{\overline{10}|0.05}+10(Da)_{\overline{10}|0.05}}{1+(0.06-0.05)a_{\overline{10}|0.05}}=\frac{1227.83}{1+(0.01)(7.7217)}=\$1139.82.$$

这个答案小于例 6.10 (1) 的答案，因为此处贷款条件对借款人较为不利。

例 6.12　A 向 B 借款 \$20000, 言明分 20 次年度以分期付款偿还，每次付等额的本金，再加上对未偿还的余额付 3% 实质利率的利息。经过 10 年以后， B 将接受未来付款的权利出售给 C, 其售价使 C 能在随后 5 年内得到 5% 的实质收益率，最后 5 年内则有 4% 的实质收益率。求此价格。(算到元为止)

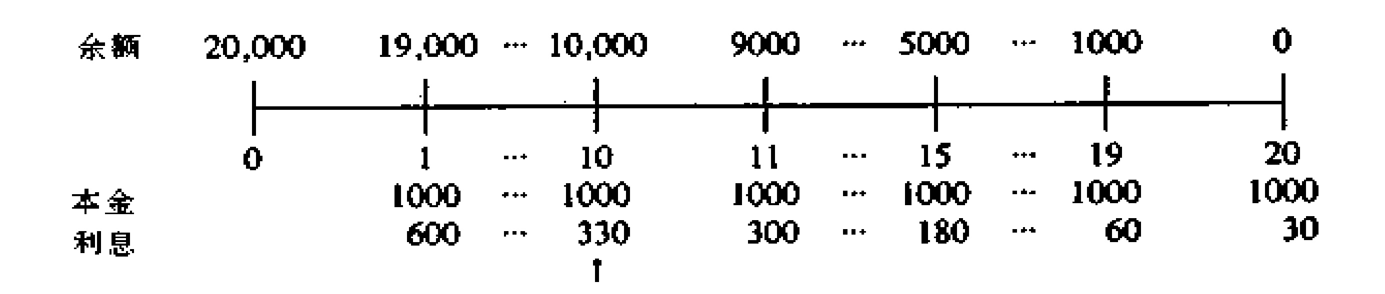


图 6.1　例 6.12 的时间图

A 每年应付 \$1000 的本金再加上未偿还余额 3% 的利息。这些付款见图 6.1 的下面部分。第 10 年末对 C 而言的价格就是余下付款的现时值，即

$$\begin{aligned}&1000[a_{\overline{5}|0.05}+(1.05)^{-5}a_{\overline{5}|0.04}]+[150a_{\overline{5}|0.05}+30(Da)_{\overline{5}|0.05}\\+\;&30(1.05)^{-5}(Da)_{\overline{5}|0.04}]=1000[4.3295+(0.78353)(4.4518)\\+\;&\left[150(4.3295)+30\left(\frac{5-4.3295}{0.05}\right)+30(0.78353)\left(\frac{5-4.4518}{0.04}\right)\right]\\&=\$9191,\end{aligned}$$

算到元为止。此答案小于未偿还贷款余额 \$10000, 因为 C 的收益率总是超过 3% 。

例 6.13　A 向 B 借款 \$10000, 言明以每年底支付的 10 次分期付款来归还，且其每一次分期付款金额比前一次多 20% 。此项贷款实质利率为 10% 。试确定头 3 次分期付款所偿还的本金金额。

由 (4.39) 式有

$$10000 = R_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1.2}{1.1}\right)^{10}}{0.1 - 0.2} \right] = 13.87182 R_1$$

或

$$R_1 = \frac{10000}{13.87182} = \$720.89.$$

现在计算分期偿还表头三行中的各项。对于第一行

$$I_1 = iB_0 = (0.1)(10000) = \$1000.00$$

及

$$P_1 = R_1 - I_1 = 720.89 - 1000.00 = -\$279.11.$$

这里发生的情况是第一次付款不足以支付贷款的利息，因此支付的本金为负值。这造成了未偿还贷款余额的增加，即

$$B_1 = B_0 - P_1 = 10000 + 279.11 = \$10279.11$$

分期偿还表中第二行的计算是：

$$\begin{aligned} R_2 &= 1.2R_1 = (1.2)(720.89) = \$865.07, \\ I_2 &= iB_1 = (0.1)(10279.11) = \$1027.91, \\ P_2 &= R_2 - I_2 = 865.07 - 1027.91 = -\$162.84, \\ B_2 &= B_1 - P_2 = 10279.11 + 162.84 = \$10441.95. \end{aligned}$$

继续看第三行：

$$\begin{aligned}
R_3 &= 1.2R_2 = (1.2)(865.07) = \$1038.08,\\
I_3 &= iB_2 = (0.1)(10441.95) = \$1044.20,\\
P_3 &= R_3 - I_3 = 1038.08 - 1044.20 = -\$6.12,\\
B_3 &= B_2 - P_3 = 10441.95 + 6.12 = \$10448.07.
\end{aligned}$$

于是，在头 3 次分期付款中偿还的本金金额是：

$$P_1 + P_2 + P_3 = -279.11 - 162.84 - 6.12 = -\$448.07,$$

它也就是 $B_0 - B_3$ 。第 4 次及以后各次分期付款中偿还的本金是正的，而此贷款在 10 年之末终究分期偿还到零。这个例子展示了贷款头 3 年中的负分期偿还。

例 6.14　A 向 B 借款。A 愿意作相继四次的年度付款，金额为 100, 100, 1000 及 1000 。B 要从贷款中收到 12% 的实质利率，且 A 要参加 B 所持有的实质利率为 8% 的偿债基金以偿还这笔贷款，问 A 最多能借多少钱？

设 L 为贷款金额。付给贷款的年度利息是 $.12L$, 这样，四次相继的偿债基金储蓄额为 $100-0.12L$, $100-0.12L$, $1000-0.12L$ 及 $1000-0.12L$ 。因为偿债基金的积累值必须等于原始贷款金额，故有

$$(100-0.12L)s_{\overline{4}|0.08} + 900s_{\overline{2}|0.08} = L$$

或

$$\begin{aligned}
L &= \frac{100s_{\overline{4}|0.08} + 900s_{\overline{2}|0.08}}{1+0.12s_{\overline{4}|0.08}}\\
&= \frac{(100)(4.5061)+(900)(2.08)}{1+(0.12)(4.5061)} = \$1507.47.
\end{aligned}$$

然而，这个答案会遭人批评。很显然，A 在头两年的付款不足以付给 B 贷款金额 12% 的利息。这样，偿债基金就是负的。

假设这一负的偿债基金有 8% 的利率是不合理的，因为这意味着 A 可以按 8% 的利率借钱了。因为 B 持有偿债基金，所以假设 A 必须以 12% 的利率借钱更合理得多。这样，头两年的利息缺额应予本金化而加入到贷款金额中去。设 L' 为这种条件下的贷款金额，则有

$$B_2^r = L'(1.12)^2 - 100s_{\overline{2}|0.12}$$

或

$$B_2^r = 1.2544L' - 212.$$

然而，B_2^r 是贷款增加后的金额，它必须在偿债基金中积累，从而有

$$B_2^r = (1000 - 0.12B_2^r)s_{\overline{2}|0.08}$$

或

$$B_2^r = \frac{1000s_{\overline{2}|0.08}}{1 + 0.12s_{\overline{2}|0.08}} = \frac{1000(2.08)}{1 + (0.12)(2.08)} = \$1664.53.$$

故算得原始贷款为

$$L' = \frac{B_2^r + 212}{1.2544} = \$1495.96.$$

可见 L' 稍小于 L, 这正如所预料的。

§6.7 连续支付分期偿还

可以建立以连续支付来分期偿还贷款的公式。这些公式具有概念和理论上的价值，但在实际应用中使用并不广泛。

首先看一下支付率为常数的情形。考虑一项贷款 $\bar{a}_{\overline{n}|}$，它在 n 个时期内以每时期支付 1 的支付率连续偿还。很容易推广公式 (6.1) 和 (6.2) 以确定时刻 t 的未偿还贷款余额，$0 \leq t \leq n$

$$B_t^p = \bar{a}_{\overline{n-t}|} \tag{6.10}$$

及

$$B_t^r = \bar{a}_{\overline{n}|}(1+i)^t - \bar{s}_{\overline{t}|}. \tag{6.11}$$

我们也知道，连续付款中一部分是利息，一部分是偿还本金。设 $\overline{I}_t$ 为在时刻 t 的瞬时利息支付率，而 $\overline{P}_t$ 为时刻 t 的瞬时本金偿还率。由通常推理，式 (6.3) 和 (6.4) 的推广是

$$\overline{I}_t = \delta \cdot B_t \tag{6.12}$$

及

$$\overline{P}_t = 1 - \delta \cdot B_t. \tag{6.13}$$

如果我们能证明

$$\frac{d}{dt}B_t = -\overline{P}_t$$

(因为未偿还贷款余额的瞬时的减少率必须等于本金的偿还率) 就可验证 (6.12) 和 (6.13) 式。如果微分 (6.10) 式，就有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_t &= \frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{n-t}|} = \frac{d}{dt}\frac{1-v^{n-t}}{\delta} \\
&= -\frac{d}{dt}\frac{(1+i)^{t-n}}{\delta} = -\frac{(1+i)^{t-n}\log_e(1+i)}{\delta} \\
&= -(1+i)^{t-n} = -v^{n-t} \\
&= \delta\bar{a}_{\overline{n-t}|} - 1 = \delta B_t - 1 = -\overline{P}_t,
\end{aligned}$$

这就是 (6.13) 式。

在 4.5 节中我们曾建立起一个恒等式

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{t}|} = 1 - \delta\bar{a}_{\overline{t}|}, \tag{4.26}$$

并曾指出可以给出公式以字面上的解释，上面这一段的讨论就提供了对此公式的字面解释。

其次考虑支付率可以变化的推广情形。假设偿还贷款的付款以每时期 R_t 的比率连续支付。这一符号同第五章中从贷款人角度使用的符号是一致的。原始贷款金额是所有付款的现时值，即

$$L = B_0 = \int_0^n v^s R_s ds. \tag{6.14}$$

于是，关于未偿还贷款余额的两个公式就变成

$$B_t^p = \int_t^n v^{s-t} R_s ds \tag{6.15}$$

及

$$B_t^r = B_0(1+i)^t - \int_0^t R_s(1+i)^{t-s} ds. \tag{6.16}$$

有趣的是，公式 (6.16) 与 (5.18) 完全相同，后者是从不同角度建立起来的，其中要作一个标准的替换 $R_s = -C_s$ 。

上述公式假设了利息效力为常数。可以将以上结果直接推广到变利息效力的情形。所导出的公式类似于 (5.19) 式，此事留作习题。

例 6.15　试证明

$$\int_0^n v^t \overline{a}'_{\overline{n-t|}} dt = \int_0^n v'^t \overline{a}_{\overline{n-t|}} dt,$$

其中未加撇的符号是基于利息效力 δ, 而加撇的符号是基于利息效力 δ' 。

我们有

$$\int_0^n v^t \overline{a}'_{\overline{n-t|}} dt = \int_0^n \int_0^{n-t} v^t v'^r dr dt.$$

现在如图 6.2 所示交换积分次序，

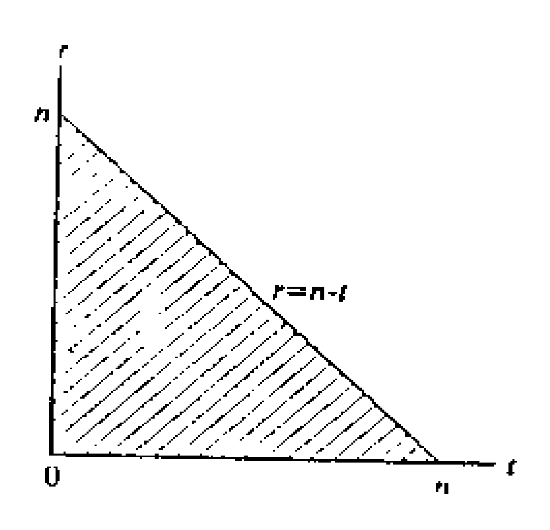


图 6.2　例 6.15 的积分区域

二重积分成为

$$\begin{aligned}\int_0^n \int_0^{n-t} v^t v'^r dr dt &= \int_0^n \int_0^{n-r} v^t v'^r dt dr \\ &= \int_0^n v'^r \bar{a}_{\overline{n-r}|} dr.\end{aligned}$$

这就是我们所要的结果，只须将 t 替换 r 就可。读者可能会感到奇怪，这一恒等式竟是对的。

§6.8　级率本金金额

在实际应用中经常遇到的一个问题是：考虑一笔贷款的分期偿还，在其中贷款余额被分割为若干部分，而各部分按不同利率计息。例如，一家信用社可能这样开价：对未偿还贷款的头 \$1000 按月利率 $1\frac{1}{2}\%$ 计息，而任何超过部分则按月利率 1% 计息。我们

把贷款余额的这些分割的各部分称为级率本金金额。

若要决定一项等额的周期付款以偿还一笔含有级率本金金额的贷款，这样一个问题很奇怪竟是一个非平凡问题，它需要用试验法来求解。

在本节中我们将给出一个对两级率贷款的此种问题的解法。这种方法可以推广到多级率的情形。

考虑一笔贷款 L, 它在 n 个时期内以等额付款 R 来偿还。利息是这样计算的：对未偿还贷款余额的头 L' 按每时期利率 i 来计息 $(0 < L' < L)$; 而在超过 L' 的部分则按每时期利率 j 来计息。在实际中多数情况是 $i > j$, 虽然在推导过程中并不一定要如此。要求确定等额支付 R 。

在决定 R 以前首先要找到"超限"时期，即未偿还贷款余额首次变成小于或等于 L' 的时期。记此时期为 a, 则 a 是使

$$B_a \leq L' \tag{6.17}$$

的最小整数。

贷款余额的数列展示于图 6.3 。

可由以下程序建立 R 的公式：

1. 确定 B_a^p 。
2. 确定 B_a^r 。
3. 令二者相等并解 R 。

由将来法得出

$$B_a^p = Ra_{\overline{n-a}|i}. \tag{6.18}$$

而过去法给出

$$B_a^r = (L - L')(1+j)^a + L' + iL's_{\overline{a}|j} - Rs_{\overline{a}|j}. \tag{6.19}$$

令 (6.18) 与 (6.19) 相等并解 R, 可得

$$R = \frac{(L - L')(1+j)^a + L' + iL's_{\overline{a}|j}}{a_{\overline{n-a}|i} + s_{\overline{a}|j}}. \tag{6.20}$$

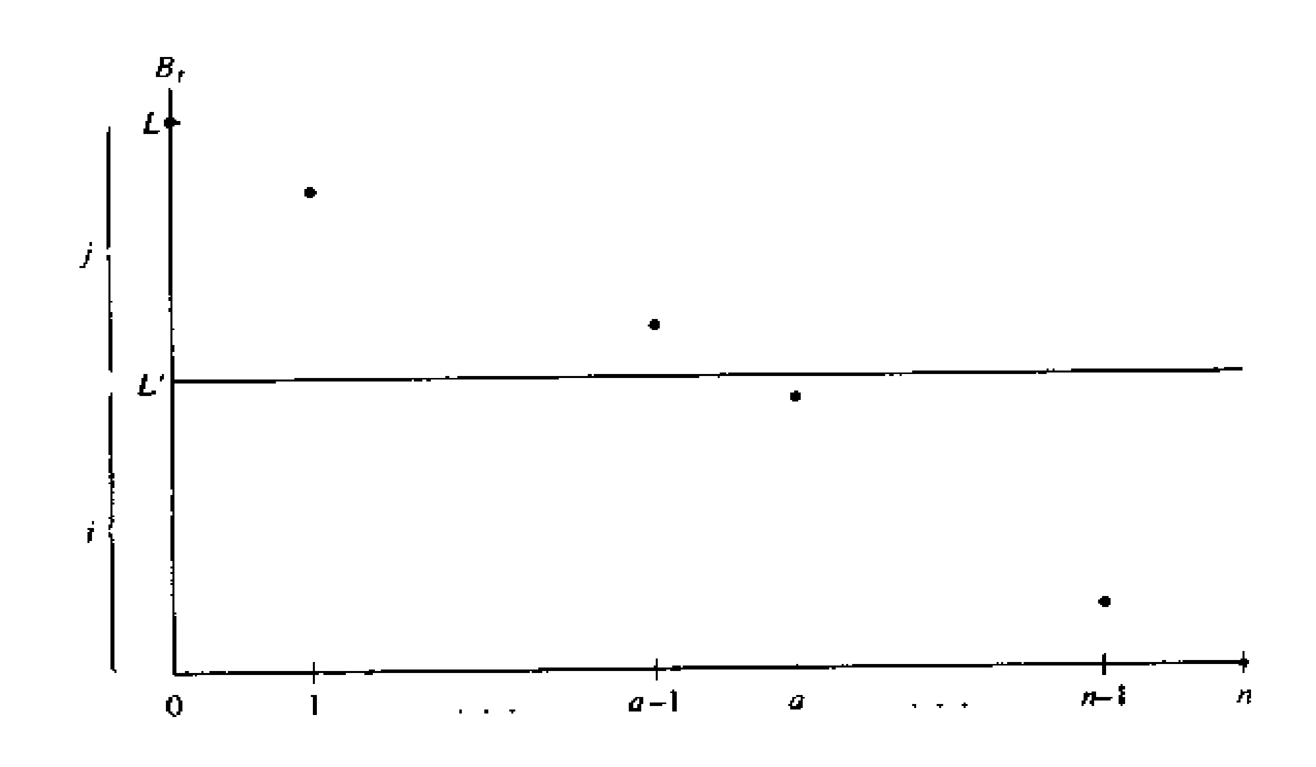


图 6.3　含有级率本金金额贷款的未偿还贷款余额

(6.20) 式就是需要的等额周期付款的公式。

虽然 (6.20) 式是我们所需要的关于 R 的公式，但超限时期 a 仍然未知。可以给出一个简单的准则以使解 a 时需要的试验次数最小。

如果将 (6.18) 与 (6.20) 式代入 (6.17) 式，则 a 是一个使

$$\frac{(L-L')(1+j)^a+L'+iL's_{\overline{a}|j}}{a_{\overline{n-a}|i}+s_{\overline{a}|j}}a_{\overline{n-a}|i}\le L'$$

的最小整数。上述不等式可看作能用于决定 a 的准则。

然而，这一准则还可以大大简化如下：

$$\begin{aligned}(L-L')(1+j)^a a_{\overline{n-a}|i} &+ iL's_{\overline{a}|j}a_{\overline{n-a}|i}\le L's_{\overline{a}|j},\\ (L-L')(1+j)^a a_{\overline{n-a}|i} &\le L'v_i^{n-a}s_{\overline{a}|j},\\ \frac{L-L'}{L'} &\le \frac{a_{\overline{a}|j}}{s_{\overline{n-a}|i}}.\end{aligned}\tag{6.21}$$

(6.21) 式是一个可以用来求 a 的简单准则。

另一种用计算机处理这种试验问题的方法就是用迭代法解 R 。其过程如下:

1. 确定一近似的初始值 R_0 。例如, R_0.可以基于介乎 i 与 j 之间的某个利率。

2. $B_0 = L$ 。

3. 用递推公式

$$B_t = B_{t-1} - R + iL' + j(B_{t-1} - L'),\ 若 B_{t-1} > L', \quad (6.22a)$$

$$B_t = B_{t-1} - R + iB_{t-1},\ 若 B_{t-1} \le L', \quad (6.22b)$$

4. $B_n = 0$ 。

借助于这些公式, 可以在计算机上用标准数值方法形成逐次的 $R_1, R_2, \cdots$ 等值。

例 6.16　考虑一笔 \$3000 的贷款, 它可以在 12 个月内用等额的月度付款来归还。利息对未偿还贷款余额的头 \$1000 用月利率 $1\frac{1}{2}\%$ 来计算; 而对超过 \$1000 的其他部分均用月利率 1% 来计算。求恰可分期还清这笔贷款的等额支付。

我们有 $L = 3000$, $L' = 1000$, $n = 12$, $i = 0.015$, $j = 0.01$ 所以 (6.21) 式给出

$$2 \le \frac{a_{\overline{a}|0.01}}{s_{\overline{12-a}|0.015}}.$$

满足这一不等式的最小整数为 $a = 9$ 。由 (6.20) 式给出的等额月度付款为

$$R = \frac{2000(1.01)^9 + 1000 + 15 s_{\overline{9}|0.01}}{a_{\overline{3}|0.015} + s_{\overline{9}|0.01}} = 270.98545.$$

精确到五位小数的完整的分期偿还表见表 6.7 。前面提出的准则得到验证, 因为 $B_8 > 1000$ 及 $B_9 < 1000$ 。支付利息这一

列在未偿还贷款余额的头 \$1000 按 $1\frac{1}{2}\%$ 计算，而其余则按 1% 计算。

表 6.7　\$3000 贷款在 12 个月内头 \$1000 按月息 $1\frac{1}{2}\%$ 计算的分期偿还表

月	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				3000.00000
1	270.98545	35.00000	235.98545	2764.01455
2	270.98545	32.64015	238.34530	2525.66925
3	270.98545	30.25669	240.72876	2284.94049
4	270.98545	27.84940	243.13605	2041.80445
5	270.98545	25.41804	245.56741	1796.23704
6	270.98545	22.96237	248.02308	1548.21396
7	270.98545	20.48214	250.50331	1297.71065
8	270.98545	17.97711	253.00834	1044.70231
9	270.98545	15.44702	255.53843	789.16388
10	270.98545	11.83746	259.14799	520.01589
11	270.98545	7.95024	263.03521	266.98068
12	270.98545	4.00471	266.98074	−0.00006*

* 应为 0, 有 0.00006 的舍入误差

习　题

§6.2　确定未偿还贷款余额

1. 一笔 \$1000 的贷款在 5 年内以每季度之末付款来偿还，利率为季度转换 6% 。试确定第 2 年末的未偿还贷款余额。

2. 一笔 \$10000 的贷款以如下方式偿还：每年末付款 \$2000, 在最后一笔正规付款后一年还有一笔较小的最后付款。实质利率为 12% 。试确定在借款人已经付了等于贷款金额的款项时，还剩下的未偿还贷款余额。算到元为止。

3. 一笔贷款以每季度末付 \$1500 的分期付款来偿还，其利率为季度转换 10% 。如果在第 1 年末的贷款余额为 \$12000, 求原始贷款余额。算到元为止。

4. 一笔贷款以每年末支付的 15 次年度付款来偿还。头 5 次分期付款为每次 \$4000, 其后 5 次为每次 \$3000, 最后 5 次为每次

\$2000 。试用 a) 将来法和 b) 过去法确定第 2 次 \$3000 付款之后未偿还贷款余额的表达式。

5. 一笔贷款以 $3\frac{1}{2}$ 年内每半年之末支付的等额分期付款来偿还，名义利率为半年度转换 8% 。在第 4 次付款以后，未偿还贷款余额为 \$5000 。求原始贷款金额。算到元为止。

6. 有一笔 \$20000 的贷款，在 12 年内以每年末付一次款来偿还。如果 $(1+i)^4=2$, 试确定第四次付款后的未偿还贷款余额。算到元为止。

7. 一笔 \$20, 000 的抵押贷款以每年末支付的 20 次分期付款来偿还。借款人付了 5 次款，并在随后的 2 年内临时不能付款。如果这笔贷款仍然要在原来的 20 年内偿还，求第 8 年末开始的修正付款金额的表达式。

8. 一项贷款为 1, 原计划以 25 次在每年末支付的等额付款来偿还。如果在第 6 到第 10 次付款中每次附加付款 K, 则足以比原来计划早 5 年还清贷款。试证明

$$K=\frac{a_{\overline{20}|}-a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{25}|}a_{\overline{5}|}}.$$

9. 一笔贷款以等额付款来偿还。如果 B_t, B_{t+1}, B_{t+2} 和 B_{t+3} 是四次相继的未偿还贷款余额，求证：

a) $(B_t-B_{t+1})(B_{t+2}-B_{t+3})=(B_{t+1}-B_{t+2})^2$ 。

b) $B_t+B_{t+3}<B_{t+1}+B_{t+2}$ 。

§6.3　分期偿还表

10. 一笔贷款在 5 年内以每季度末付款 \$1000 来偿还，其利率为季度转换 12% 。求第 6 次分期付款中的本金金额。

11. 有一笔贷款在 n 个时期内以每时期末付款 1 来偿还。试确定在整个贷款期间支付利息的现时值的表达式。

12. 一笔 \$10000 的贷款按 10% 实质利率以每年末支付的 20

次分期付款来偿还。证明第 11 次分期付款的利息金额为

$$\frac{1000}{1+v^{10}}.$$

13. 一笔贷款按 9% 实质利率以每年末支付的 20 次分期付款来偿还。问在哪一次分期付款中利息部分和本金部分最接近于彼此相等？

14. 一笔贷款在 5 年内以每季度之末付款来偿还。如果第 3 次付款的本金金额为 \$100, 求最后 5 次付款的本金金额。其中利率为季度转换 10% 。

15. 一笔贷款以 20 年内每年末付款 1 来偿还。前 10 年实质利率为 i, 后 10 年实质利率为 j 。求以下表达式：

a) 第 5 次分期付款中支付的利息金额。

b) 第 15 次分期付款中支付的本金金额。

16. 一笔原始本金为 A 的抵押贷款以下列方式偿还：每年末支付等额的付款 K, 一直支付到连同最后一次较小付款还清贷款为止。实质利率为 i 。

a) 求第 t 次分期付款中的本金金额。

b) 分期偿还表中偿还本金这一列是否构成几何级数 (不包含最后一次非正规付款)?

17. 一位借款人有一项抵押贷款，它需要在 20 年内每年末支付等额的年度付款。在第 7 次正规付款时加付了一笔钱，它等于按原分期偿还表应在第 8 次正规付款中支付的本金金额。如果在第 8 次及以后各年中继续每年付 1 直至全部还清抵押为止，求证在整个抵押期间少付的利息金额为

$$1-v^{13}.$$

18. 一笔贷款 L 在 10 年内以每年底付款来分期偿还。如果 $v^5=2/3$, 试求：

a) 在头 5 次付款中偿还的本金金额。

b) 如果最后 5 次付款未按计划支付，问在第 10 年末尚欠多少金额？

19. 一项 35 年期贷款应以每年末的等额分期付款来偿还。第 8 次分期付款中支付的利息金额为 \$135, 在第 22 次付款中支付的利息金额为 \$108 。求第 29 次付款中应付的利息金额。

§6.4 偿债基金

20. A 曾借款 \$10000, 实质利率为 10% 。 A 积累一笔实质利率为 8% 的偿债基金以偿还这笔贷款。在第 10 年末偿债基金余额为 \$5000 。在第 11 年末 A 支付总额为 \$1500 。

a) \$1500 中有多少是当前支付给贷款的利息？

b) \$1500 中有多少进入偿债基金？

c) \$1500 中有多少应被认为是利息？

d) \$1500 中有多少应被认为是本金？

e) 第 11 年末的偿债基金余额为多少？

21. 有一笔 \$1000 的贷款以这样的形式偿还：每年支付等额的年度付款 \$120, 再加上在最后一次正规付款后一年有一笔较小的最后付款。实质利率为 8% 。试从代数上和字面上证明，在作第 5 次付款以后，未偿还贷款余额为：

a) $1000(1.08)^5-120s_{\overline{5}|}$ 。

b) $1000-40s_{\overline{5}|}$ 。

22. 证明 $a_{\overline{n}|i\&j}=\frac{s_{\overline{n}|j}}{1+is_{\overline{n}|j}}$ 。

23. 在一笔 \$10000 的贷款中， 9% 实质利率的利息必须在每年末支付。借款人每年初也向一实质利率为 7% 的偿债基金储蓄 \$X 。在第 10 年末偿债基金正好足以还清贷款。求 X 。

24. 一位借款人以 10 次 \$1000 的年度付款偿还一笔贷款。贷款的一半是以分期偿还方法按实质利率 5% 偿还的。另一半则用偿债基金方法偿还，其中贷款人得到 5% 的实质利率，而偿债基金则按 4% 实质利率积累。求贷款金额。算到元为止。

25. A 借款 \$12000, 为期 10 年，并同意每半年付款 \$1000 。贷款人前 5 年收取半年度转换 12% 的实质利率，后 5 年则为半年度转换 10% 的实质利率。每次付款的余额投资于一个有半年度转换 8% 利率的偿债基金。试确定在第 10 年末此偿债基金欠付贷款的金额。算到元为止。

26. a) 一位借款人以半年度转换 8% 的利率借得一笔 \$3000 的贷款，为期 10 年。借款人用一笔有 5% 半年度转换利率的偿债基金偿还三分之一的本金，另外三分之二则用有 7% 半年度转换利率的另一笔偿债基金来偿还。求半年度付款总额。

b) 在 (a) 中，如果借款人每年将偿债基金储蓄总额的三分之一存入有 5% 半年度转换利率的偿债基金，另三分之二则存入有 7% 半年度转换利率的偿债基金，则结果将如何？

c) 由通常推理来判断 (a) 和 (b) 答案的相对大小。

27. 在 31 年内每年末付款 \$36000 以偿还一笔 \$400000 的贷款。假如借款人用一项有 3% 实质利率的偿债基金来偿还本金，求在贷款中对贷款人支付的实质利率。

28. 一项 20 年期的延付年金现时值为 \$10000, 其中在前 10 年实质利率为 8%, 而在后 10 年为 7% 。一位投资人按某价格购买了此项年金，他在整个投资期间在购买价的基础上获得收益率为 9%, 并进一步允许用一笔前 10 年利率为 6% 和后 10 年利率为 5% 的偿债基金来代替这笔资金。求每年存入偿债基金的金额。

29. 一笔金额为 1 的贷款在 n 个时期内为贷款人获得每个时期 i 的收益率，而借款人用一项利率为每时期 j 的偿债基金来偿还。如果 $0 \leq t \leq n$, 试确定下列表达式：

a) 周期性付给贷款人的利息。

b) 周期性偿债基金储蓄。

c) 偿债基金在第 t 个时期得到的利息。

d) 偿债基金在第 t 个时期末的金额。

e) 贷款在第 t 个时期末的净金额。

f) 在第 t 个时期支付的净利息。

g) 在第 t 个时期偿还的本金。

§6.5　支付期不同于利息转换期

30. 一位投资者购买了一项年金，其本金和利息的付款为在 10 年内每季度 \$500 。年度实质利率为 8% 。投资者在 10 年期间总共得到多少利息？算到元为止。

31. A 以半年度转换利率 12% 借款 \$10000, 为期 5 年。 A 用偿债基金方法来归还本金，他在 5 年内每年末向基金存款，该基金有 8% 的实质利率。求 A 要完全偿还贷款在 5 年内需付的总金额。算到元为止。

32. 一位借款人用每年末支付 \$3000 来偿还一笔贷款，整个贷款时期未知，如果第 3 次分期付款中利息金额为 \$2000, 求第 6 次分期付款中本金的金额。设利率为季度转换 10% 。

33. A 以 10% 的季度转换利率借款 \$5000, 为期 10 年。 A 并不即时支付利息，而是将所有增殖的利息在 10 年之末连同本金一起归还。如果通过一项有半年度转换利率 7% 的偿债基金来偿还这笔贷款，求需要的年度偿债基金储蓄金额。

34. 一笔 \$3000 的贷款以 20 次季度付款来分期偿还。第 11 次和第 12 次付款未付。在规定第 12 次付款时此贷款重新谈判，并决定第 13 次付款为 \$N, 而第 14, 16, 18 及 20 次付款为每次均比以前付款多 \$40 。如果利率为半年度转换 8%, 试确定 N 的值使得贷款能在原定的期限内完全付清。算到元为止。

§6.6　变额支付序列

35. 一项贷款以 10 次年度付款来偿还。第 1 次付款等于该付的利息，第 2 次付款为第 1 次的两倍，第 3 次付款为第 1 次的 3 倍，如此等等。试证贷款的利率满足

$$(Ia)_{\overline{10}|i}\cdot i=1.$$

36. 一笔贷款以 10 次付款来偿还。第 1 次付款为 10, 第 2 次

为 9, 这样下去直到第 10 次付款为 1 。试证第 6 次付款的利息金额为

$$5 - a_{\overline{5}|}.$$

37. 一笔贷款这样来偿还：第 1 年付 \$200, 以后每年增加 \$50, 直到某年付 \$1000, 其时付款即结束。如实质利率为 4%, 求第 4 次付款的本金金额。

38. 一位借款人用 10 次等额的半年度本金付款来偿还一笔 \$1000 的贷款。每年按照未偿还余额支付利息，其利率为季度转换 6% 。求使投资者得到半年度转换 10% 收益率的价格。

39. 一笔 \$8000 的抵押贷款要在 20 年内偿还，偿还条件是每半年分期支付 \$200 再加上对未偿还余额支付 5% 的利息。恰在第 15 次付款后贷款人将这笔抵押贷款以某价格出售，新的贷款人可获得 6% 的收益率，并允许在一利率为 4% 的偿债基金中积累以代替原来的资金。假设所有利率均为半年度转换。

a) 求证若每 6 个月等额净返回，则价格为

$$\frac{75 s_{\overline{25}|0.02} + 6250}{1 + 0.03 s_{\overline{25}|0.02}} = \$4412.$$

b) 求证若每 6 个月等额偿债基金储蓄，则价格为

$$\frac{(a_{\overline{25}|0.03} + 125) s_{\overline{25}|0.02}}{0.03 a_{\overline{25}|0.03}(1 + 0.03 s_{\overline{25}|0.02})} = \$4453.$$

c) 由通常推理来判断 a) 和 b) 答案的相对大小。

40. A 以 10% 的年实质利率借款 \$2000, 并愿以每年底付款来偿还。第一次付款为 \$400, 以后每次付款比前一次多 4%, 在最后一次正规付款后一年还有一次较小的最后付款。

a) 求第 3 年末的未偿还贷款余额。

b) 求第 3 次付款偿还的本金。

41. 两笔同样金额的贷款以 4% 实质利率分期偿还。贷款 L 以 30 次等额的年度付款来偿还。贷款 M 以 30 次年度付款来偿还，其中每次付款偿还的本金金额相等，而利息则与未偿还余额成比例。贷款 L 的付款在第 k 年末首次超过贷款 M 的付款。求 k 。

42. A 以实质利率 i 参与投资。在第 1 年末 A 抽回所得利息的 $162\frac{1}{2}\%$, 第 2 年末抽回所得利息的 325%, 如此下去抽回的比例按算术级数增长。在第 16 年末基金告尽。求 i 。

§6.7　连续支付分期偿还

43. 一笔 $\bar{a}_{\overline{25|}}$ 的贷款在 25 年内以每年付 1 的年率连续支付来偿还。如果 $i = 0.05$, 求第 6 到第 10 年内支付的利息总金额。

44. a) 求证

$$(1+i)^t - \frac{\bar{s}_{\overline{t|}}}{\bar{a}_{\overline{n|}}} = \frac{\bar{a}_{\overline{n-t|}}}{\bar{a}_{\overline{n|}}}.$$

b) 对 a) 中得到的结果给出字面解释。

45. 一笔贷款在 n 个时期内以连续支付来偿还，在时刻 t 的支付率为每时刻 t 。求在时刻 k $(0 \le k \le n)$ 未偿还贷款余额的表达式。

a) 用将来法。

b) 用过去法。

46. 一项金额为 1 的贷款在 10 年内以连续支付来分期偿还，支付率的变化形式是未偿还贷款余额为线性。利息效力为 10% 。试求：

a) 头 5 年偿还的本金。

b) 头 5 年支付的利息。

47. 当利息效力为连续变化时，将 (6.14), (6.15) 与 (6.16) 表示为更一般的形式。

48. 已知一项保险索赔的余留未贴现支付在遭到索赔后 t 时期为 $\alpha e^{-\beta t}$

a) 如瞬时索赔支付率为 $P(t)$ 。求 $P(t)$ 的表达式。

b) 在时刻 0 确定索赔的未贴现总支付。

c) 若利息效力为 δ, 求时刻 0 索赔总支付的现时值。

d) 若利息效力为 δ, 求时刻 t 索赔余留支付的现时值。

§6.8　级率本金金额

49. 为了偿还 \$2000 的贷款，每季度末付 \$$P$ 。未偿还余额的头 \$500, 其利率为 $i^{(4)}=16\%$, 而超过的部分利率为 $i^{(4)}=14\%$ 。如果在第 1 年末偿还贷款余额为 \$1000, 求 P 。算到元为止。

50. 一笔 \$1000 的贷款其分期偿还形式如下：每季度支付 \$100, 直到连同最后一次正规付款后一个季度支付的一笔较小最后付款还清贷款为止。利息在未偿还贷款余额的头 \$500 按季度转换 12% 计算，而超过部分按季度转换 8% 计算。

a) 求第 4 次分期付款中偿还的本金。

b) 证明在“超限”点以前，逐次偿还本金加上一常数构成一几何级数，即

$$\frac{P_{t+1}+k}{P_t+k}=1+j \text{ 对} t=1,2,\cdots,a-1.$$

(1) 求 k 。

(2) 求 j 。

51. 考虑一笔 \$3000 的贷款，它在 12 个月内以等额月度付款来偿还。利息在未偿还贷款余额的头 \$1000 按月息 $1\frac{1}{2}\%$ 计算，在随后的 \$1000 按 $1\frac{1}{4}\%$ 计算，余下的部分则按 1% 计算。求恰能分期偿还这笔贷款的等额支付金额。(提示：假设两个“超限”点在 $t=5$ 与 $t=9$, 此假设可由最后构造的分期偿还表验证为正确。)

杂题

52. a) 证明

$$a_{\overline{n}|}+i\sum_{t=0}^{n-1}a_{\overline{n-t}|}=n.$$

b) 对 a) 得到的结果给出字面解释。

53. a) 证明若一笔贷款以 n 次等额支付 R 来分期偿还，则

$$B_t = R(a_{\overline{n}|} - v^n s_{\overline{t}|}).$$

b) 对 a) 中结果给出字面解释。

54. 一笔遗产的原始金额恰够以 $3\frac{1}{2}\%$ 的实质利率在 10 年内每年末支付 \$10,000 。甚至在基金实际上得到 5% 的实质利率时头 5 年的支付仍按原计划进行。问在第 5 年末基金内有多少超过预计的利息？算到元为止。

55. 一位投资者在 10 年内每年之初给出等额付款，用以在一家实质利率为 5% 的银行内在第 10 年之末积累到 \$10,000 。在第 5 年之末银行将利率降到实质利率 4% 。

a) 求头 5 年的年度储蓄。

b) 求后 5 年的年度储蓄。

56. 一个家庭向一项 10%30 年期抵押贷款作年度付款 R 。在经过 15 次付款以后，他们与贷款人重新谈判，愿在 5 年内还清债务，而贷款人则愿意接受在整个贷款期间按 9% 实质利率计算。求修正后年度付款的表示式。

57. 9 年以前，一个家庭按 8% 实质利率承担了一项 20 年期 \$80000 的抵押贷款，他们以年度付款来偿还。现在他们想一次支付 \$5000, 并在 9 年内还清这笔抵押贷款。试在以下两种条件下求修正的年度付款。

a) 如果贷款人愿接受在过去 9 年内有 8% 的收益率，但坚持在后 9 年内有 9% 的收益率。

b) 假如贷款人坚持在整个贷款期间要有 9% 的收益率。

58. 一笔实质利率为 5% 的 \$1000 的 10 年期贷款以等额年度付款来偿还。借款人可以加速贷款的分期偿还。然而，对任何超过原计划付款额的付款要收 2% 的预付款罚金。假如借款人在

第 1 年末支付 \$300, 而在第 2 年末支付 \$250, 求恰在第 3 年末付款前的未偿还贷款余额。算到元为止。

第七章　债券和其他证券

§7.1　引　言

利息理论的主要应用之一是决定债券和其他证券 (如优先股和普通股) 的价格和价值。本章主要讨论债券，但也在 7.2, 7.10 和 7.11 节对优先股和普通股作简要的考察。

在第七章中有三个主要问题：

1. 若已知投资者要求的收益率，问对某种证券应付什么价格？

2. 若已知证券的价格，问投资者最终会得到多大的收益率？

3. 某一证券在已被购买后的一给定日期的价值为多少？

应该注意在本章中并未引进新的基本原理。然而，在有效地处理涉及证券的金融业务中引入了一些新的术语和公式。

§7.2　证券类型

7.2 节考虑了三种金融市场上常见的证券。不能认为本节是对这些证券的完整的讨论，因为只是给出了非常简要的叙述。如要进一步了解这方面的内容，读者可阅读有关金融和证券的那些标准的教科书。

近年来有越来越多的奇特的金融契约。目前我们暂时不去讨论它们，因为首先应讨论基本的东西。在 8.8 节中才会讨论那些较新的金融契约。

本章中将讨论的三类主要证券是：(1) 债券，(2) 优先股与 (3) 普通股。

债券

债券 是一种带利息的证券，它承诺在未来的某个 (或某些) 日期支付所述的某个 (或某些) 金额的钱款。它是由借款者出具的正式的债务单据，经常是整数金额，例如 $1000 或 $5000 。债券通常由企业或政府单位作为集资手段来发行。

债券通常在一固定时期之末偿还。这一固定时期称为债券的 *期限* 。债券的期限之末称为 *到期日* 。偶而也发行期限为无限的债券，如英国政府无归偿期证券，这种债券称为 *无限期债券* 。也有的债券其期限可以变化，由借款人自己决定。这种债券称为 *通知偿还债券*，将在 7.7 节中讨论。任何早于或等于到期日而债券可以偿还的日期称为 *偿还日* 。

债券可按各种途径分类。一种分类法是分为 *积累债券* 和 *附息票债券*，息票是债券的发行者在到期偿还前所作的周期性付款。积累债券则是其偿还价格包含了原始贷款加上所有积累的利息。美国国库发行的 Series E 储蓄债券就是此种类型债券的典型例子。近来，所谓 *无息票债券* 在投资者中间非常流行。虽然如此，多数债券附有周期支付的息票，以后除非申明总认为是讨论此类债券。本章大部分篇幅将限于这后一种债券，因为积累债券或无息票债券很容易用前几章已讨论的基本复利方法来处理。

第二种分类法是分为 *记名债券* 和 *不记名债券* 。记名债券是在借款人的记录中载明贷款人。如果贷款人决定出售债券，则所有权的变化必须报告借款人。在每个息票支付日期，由借款人按照记录将周期性息票付款付给贷款人。不记名债券则是贷款人并不列在借款人的记录中。因为债券究竟属于谁具有法律上财产的意义，一项不记名债券常称为 *持票人债券* 。不记名债券发行时常附有息票。息票可由债券持有人撕下并兑现。因此这种债券常称为 *见票即付息债券* 。

第三种分类法是按照债券所具有的保证来分类。*抵押债券* 是由不动产的抵押来保证的债券。 *信用债券* 是仅由借款人的一般信用保证的债券。这两类债券是有些不一样的。一般而言，抵押

债券比信用债券有更高的安全程度，因为在抵押债券违约时贷款人可以取消赎回抵押品的权利。

有一类对贷款人有高度风险的债券是 收益债券 或 调整债券 。对于这种债券，只有在借款人有足够收入时才支付周期性的息票。收益债券一度很风行，但近年大量消失了。

高风险债券 的更现代化的版本常称为“垃圾”债券 。这些债券由企业 (典型地说与公司的合并，购买或接管有关) 发行。它们比一般的团体法人债券在支付上有高得多的违约风险。相应地，它们必须付给贷款人与这些风险相称的适当高利率的利息。这些债券有时被称为属于 低投资级别 。“投资级别”是指由某些评价机构提供的有关各种债券的质量评定表。本章中将不包括有违约风险的金融计算，但在 9.5 节中将予以讨论。

有一种债券称为 可转换债券，它有点象一种混合物。这种债券在债券持有人的选择下，可以在未来的某个日期在某些条件下转换为发行该债券的企业的普通股。可转换债券通常是信用债券。这种债券使投资者可以在继续将其作为债券还是转化为普通股之间有一个选择，视企业在将来的业绩而定。

需要大量资金的借款者可以发行若干在同一天到期的债券。但是，大量的债务集中于同一天会给偿还或重新集资带来问题。因此，有些借款人就把一项总金额很大的债券分拆为若干项债券，这样，拆开的债券就有一系列互相错开的偿还日期。这种类型的债券称为 分期偿还债券，这将在 7.8 节中进一步分析。另一种方法是贷款人要求建立一个偿债基金，用以积累足以偿还大金额债券的金额。

美国国库发行期限长短不一的各种债券。有长达 7 年甚至更长期限的 长期国库券，也有 短期国库券 常称为“T 一券”。后者是以贴现形式出现，期限为 13, 26 或 52 周，曾在 2.8 节中简单地讨论过。美国国库也发行中等长度期限 (1 年至 7 年) 的债券，称为 中期国库券 。短期国库券的计算与长期国库券的计算有明

显的差别，这可以在例 7.2 中见到。

优先股

优先股 是一种证券，它有类似于债券的固定回报率。然而，它不同于债券的地方是：它更大程度上是持有资格的保证而不是债务保证。也就是说，优先股的持有者是发行该证券企业的部分拥有人，而债券持有者只是该企业的债权人。一般说来，优先股没有到期日，虽然偶而也有些优先股附有偿还的保证。优先股的周期性付款称为 *分红*，因为它是付给企业拥有人的。

讲到保证的程度，优先股排位在债券和其他债务单据之后，因为必须要先付债款，然后优先股才能收到分红。然而优先股在保证程度上又排位在普通股之前，因为优先股的分红要在普通股分红之前先付。

为了增加优先股的保证程度，某些企业又发行了 *积累优先股* 。这种优先股有这样的特性：企业暂不能支付的任何分红会转入未来的年份中在可能支付时给予支付。例如，一家企业发行的优先股原应付每股 \$5 的分红，但在一年中只能支付 \$3，则其余的 \$2 (也许没有利息) 将转入未来的年份。优先股的所有欠款必须在支付普通股分红之前先付清。

当企业利润足够高时，某些优先股可收到一份超过正规分红的利润。这种优先股称为 *参与优先股*，因为它与普通股一起参与赚得利润。参与优先股近来不甚普遍。

某些优先股具有类似于可转换债券的可转换特权，称为 *可转换优先股* 。这种优先股的持有人可以选择在某些条件下是否将他们的优先股转为普通股。

普通股

普通股 就象优先股那样，是一种拥有权的保证。然而，它不象优先股那样有固定的分红率。普通股的分红只有在所有债券利息、其他债务和优先股分红都支付以后才会支付。分红率完全是弹性的，并由董事会根据其判断来决定。

因为普通股的分红率是变化的，故其价格比债券或优先股更为易变。然而，在分红之后优先股持有者的所有其他利益普通股持有者也都有。

例 7.1　一项无息票债券将在 10 年之末付 \$1000, 而现售价为 \$400 。求购买者所得的半年度转换收益率。

设 j 为每半年的收益率。求值方程为

$$400(1+j)^{20}=1000$$

或

$$(1+j)^{20}=2.5,$$

故 $j=0.0469$ 。这样，半年度转换收益率为 $2(0.0469)=0.0938$ 或 9.38% 。

例 7.2　一项 13 周的短期国库券到期应付 \$10000, 今用贴现来购买并产生 7.5% 的收益率。求应付价格。

在 2.8 节中已指出，T 券的收益常用贴现率而不是用利率计算的。这些收益按单贴现计算，它事实上导致一个与 T 券同样频率转换的贴现率。也还需要象 2.3 节那样知道按怎样方式度量时期。T 券所用的度量方式常是实际 /360 。由此知价格为

$$10000\left[1-\frac{91}{360}(0.075)\right]=\$9810.42.$$

应该指出对长期国库券决定时期是用实际 / 实际而不是实际 /360 。

§7.3　债券的价格

正如在 7.1 节中所提到的，本章中所要考虑的三个基本问题之一是决定对投资者产生一定收益率的购买价格。本节考虑债券问题。

今作下列假设:

1. 所有债务由债券发行人在特定的付款日期支付。债券的市场价格将随付款违约的概率而变化，但我们在本章中将不考虑违约的可能性。反映违约概率的金融计算将在 9.5 节中讨论。

2. 债券有固定的到期日。无到期日的债券在数学上等价于优先股，并将在 7.10 节讨论。可以选择偿还日期的通知偿还债券将在 7.7 节中讨论。

3. 在息票付款日期后要立即确定债券价格。两次息票付款日期之间的债券价格将在 7.5 节中讨论。

在本节和以后各章中将使用与债券有关的下列符号:

P = 债券的 *价格* 。

F = 债券的 *面值* 或 *面额* 。此值印在债券正面，且常为在到期日支付的金额。它唯一的作用是决定借款人的 (一系列) 付款。它并不是债券在到期日以前的价格或价值的度量。习惯上按面值 \$100 来报债券的价格，虽然债券很少按这样小的面额来发行。以下除非另外申明均作此假定。

C = 债券的偿还价值，即在偿还日付给债券持有人的金额。C 常常等于 F, 例如，一项债券的通常情形是在到期日偿还面值。但 C 在下列情形也可与 F 不同： (1) 债券到期偿还的金额不等于面值， (2) 债券偿还日期在到期日之前，这时债券偿还的金额也不等于面值。除非另外申明，一般是假设债券按面值偿还。读者应注意，符号 C 在 5.5 节中也用过，当时是用来表示在决定投资基金收益率时投入本金的总净金额。

r = 债券的 *息票率*, 即用来决定息票金额的每个息票支付时期的息票率。在美国最常用的债券息票支付频率为半年度。例如，一项具有半年期息票的 8% 债券有 $r = 0.04$ 。在国际金融市场上常会碰到其他的息票支付频率，例如欧洲债券通常有年度息票。常假设息票为常数。变额息票的情况将在 7.9 节中考虑。读者应注意，符号 r 在 5.9 节中也用来表示项目投资率。

Fr = 息票的金额。

g = 债券的*修正息票率*。它定义为 $Fr = Cg$ 或 $g = Fr/C$，即 g 是每个偿还值单位的息票率而不是每个票面值单位的息票率。应当注意 g 总是与 r 以同样频率转换。在实际中，g 常常等于 r，这就是 C 等于 F 的情形。

i = 债券的*收益率*，常称为*到期收益*，即假设投资者持有债券直至偿还或到期时实际得到的利率。到期收益率在概念上恒等于 5.2 节中定义的内返回率。习惯上收益率总是与息票率按同样频率转换，以后除非另作申明总假设是如此。息票支付时期与收益率转换时期不相等的情形将在 7.9 节中讨论。也假设收益率为常数。此假设不成立的情形将在 7.9 节中讨论。

n = 从计算日起至到期日或偿还日为止的息票支付时期个数。

K = 在到期日或偿还日的偿还值按收益率计算的现时值，即 K 在收益率为 i 时为 $K = Cv^n$ 。

G = 债券的基价。基价 G 是由 $Gi = Fr$ 或 $G = Fr/i$ 定义。这样，G 是这样的金额，如果将其按收益率 i 投资，则将产生等于债券所附息票的周期性利息支付。

请读者注意：在日常事务与金融应用中会有三种不同的与债券有关的“收益”：

1. *名义收益*是债券的年度息票率。例如，一张面值为 \$100 的债券有总值为每年 \$9 的息票，则此债券的名义收益为每年 9% 。请读者注意，这里“名义”一词的用法与 1.8 节中的意义不相同，也同 9.4 节中将介绍的另一种意义不相同。这是一个容易混淆的地方。

2. *当前收益*是年度息票对债券当前价格之比。例如，假定上述债券在市场上以 \$90 出售，则当前收益就是每年 10% 。注意当前收益并不反映债券出售、偿还或到期时的任何得失。

3. *到期收益*是实际的年度收益率，或 5.2 节所定义的内返回

率。到期收益的决定将在 7.6 节中讨论。

我们将仅仅对上述三种意义中的第三种用"收益率"这个名词。但要提醒大家，在实际应用中并非每个人都象教科书中那样精确地使用术语，所以当你在债券业务中碰到象"收益"这类词时应注意它究竟指什么。

请读者注意，F, C, r, g 和 n 均由债券的条款给出，而且在整个过程中保持固定。本质上，这些参数精确地规定了借款人应付的款。另一方面，P 和 i 则是在债券整个过程中可以变化的。价格与收益率有一个精确的互逆关系，即当价格增高时收益率必下降，反之亦然。债券收益率将随金融市场上的通行利率而波动。因而波动的市场利率将导致债券价格的波动。然而，这些波动的债券价格一般并不反映该债券安全程度的增加或减少，它只是反映证券市场上利率的变化。有些不老练的债券持有人常常不理解债券价格与收益率之间的互逆关系，他们会把持有的债券价格的下降归因于借款人的可信程度变糟了，其实情况并非如此。

有四种方法可用来求债券的价格。第一种称为*基本公式*，它是最直接的。按照这种方法，价格应等于未来息票的现时值加上偿还值的现时值，即

$$P = Fra_{\overline{n}|} + Cv^n = Fra_{\overline{n}|} + K, \tag{7.1}$$

其中利息函数按收益率 i 计算。

第二个公式称为*溢价 / 折扣公式*，它可由 (7.1) 得到，

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= Fra_{\overline{n}|} + C(1 - ia_{\overline{n}|}) \\ &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

此式取这个名字的合理性可在 7.4 节中见到。(7.2) 式比 (7.1) 式更有效，因为需要计算或在利息表中查找的只有一个值而不是两个值。

第三个公式称为基价公式，也可由 (7.1) 得到。

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= Gia_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= G(1-v^n) + Cv^n \\ &= G + (C-G)v^n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

(7.3) 式也只需要一个值而不是两个。

第四个公式称为 Makeham 公式 (它以 19 世纪英国一位著名精算师 Makeham 命名) 也可由 (7.1) 式得到。

$$\begin{aligned} P &= Cv^n + Fra_{\overline{n}|} \\ &= Cv^n + Cg\left[\frac{1-v^n}{i}\right] \\ &= Cv^n + \frac{g}{i}(C - Cv^n) \\ &= K + \frac{g}{i}(C-K). \end{aligned} \tag{7.4}$$

(7.4) 式也只需要一个值而不是两个值。

Makeham 公式有一个有趣的字面解释。由基本公式，债券价格必须等于偿还值的现时值加上未来息票的现时值。 K 是偿还值的现时值。如果修正息票率 g 等于收益率 i, 则债券将以其偿还值 C 出售，故 $C-K$ 就是未来息票的现时值。然而，假若修正息票率不等于收益率 i, 则未来息票的现时值将按比例地高一些或低一些，即等于 $\frac{g}{i}(C-K)$ 。

例 7.3　有一票面值为 \$1000 的 10 年期债券，带有半年度转换 8.4% 的息票，将以 \$1050 偿还，某人要购买此债券以产生半年度转换 10% 的收益，求购买价格。使用所有四种公式。

在本例中我们有：

$$F = 1000,$$

$$
\begin{aligned}
C &= 1050, \\
r &= \frac{0.084}{2} = 0.042, \\
g &= \frac{1000}{1050}(0.042) = 0.04, \\
i &= \frac{0.10}{2} = 0.05, \\
n &= 20, \\
K &= 1050(1.05)^{-20} = 395.7340, \\
G &= \frac{0.042}{0.05}(1000) = 840.
\end{aligned}
$$

1. 基本公式：

$$
\begin{aligned}
P &= Fra_{\overline{n}|} + K \\
&= 42a_{\overline{20}|0.05} + 395.7340 \\
&= (42)(12.4622) + 395.7340 = \$919.15.
\end{aligned}
$$

2. 溢价 / 折扣公式：

$$
\begin{aligned}
P &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|} \\
&= 1050 + (42 - 52.50)a_{\overline{20}|0.05} \\
&= 1050 + (42 - 52.50)(12.4622) = \$919.15.
\end{aligned}
$$

3. 基价公式：

$$
\begin{aligned}
P &= G + (C - G)v^n \\
&= 840 + (1050 - 840)(1.05)^{-20} \\
&= 840 + (1050 - 840)(0.37689) = \$919.15.
\end{aligned}
$$

4. Makeham 公式：

$$
\begin{aligned}
P &= K + \frac{g}{i}(C - K) \\
&= 395.7340 + \frac{0.04}{0.05}(1050 - 395.7340) = \$919.15.
\end{aligned}
$$

§7.4　溢价和折扣

如果一债券的出售价超过其偿还值，即 $P > C$, 则称此债券为溢价出售，而 P 与 C 的差即称为“溢价”。类似地，假如购买价小于偿还值，即 $P < C$, 则称此债券为以*折扣* (discount) 出售，C 与 P 的差称为“折扣”。请注意这里的 discount 与第一章中已经用过的词“贴现” (discount) 有不同的含义。

可由 (7.2) 式导出溢价与折扣的表达式

$$\text{溢价} = P - C = (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} = C(g-i)a_{\overline{n}|i} \text{若} g > i \quad (7.5)$$

$$\text{折扣} = C - P = (Ci - Fr)a_{\overline{n}|i} = C(i-g)a_{\overline{n}|i} \text{若} i > g \quad (7.6)$$

很清楚，溢价与折扣名称虽不同，实质上是同样的概念，因为折扣就是负的溢价。也应注意，在许多情形下 $F = C$, 从而 $g = r$。然而，公式 (7.5) 和 (7.6) 可处理此事不成立的情形。

债券的价格取决于两个量：未来息票的现时值和偿还值的现时值。因为债券的购买价经常小于或大于偿还值，故在偿还之日会有利润 (等于折扣) 或损失 (等于溢价)。这种利润或损失反映在债券的收益率中 (当作为到期收益率计算时)。

然而，由于在到期日有利润或损失的结果，每张息票的金额不能被认为是投资者的利息收入。需要将每张息票划分成赚得的利息和本金的调整这两部分，这类似于第六章中将付款分割为利息和本金那样。

当使用这一方法时，债券的价值将由购买日的价格连续地调整到偿还日的偿还值。债券的这些调整值称为债券的*帐面值*。帐面值提供了合理的和光滑变化的一系列债券价值，许多投资者 (如保险公司和养老基金) 在财务文书中报告其债券的资产值时都用到它。债券和其他证券资产值的决定将在 7.11 节中进一步讨论。

但读者要当心的一件事是债券在购买后的帐面值与假定重新购买时债券的价格将会不同。债券在市场上的价格随通行利率而变化，而帐面值则构成一光滑序列，因为它们都基于购买时的原始收益率。

当方便时，我们将对债券使用和第六章中对贷款所用的相同的符号。这样，在购买后 t 个时期的帐面值记为 B_t，第 t 次息票所得利息金额记为 I_t，在第 t 次息票中调整的本金金额记为 P_t。等额息票继续记为 Fr。注意价格 P 等于 B_0，而偿还值 C 等于 B_n。

债券分期偿还表 是一张这样的表格，它显示了每次息票中赚得的利息和本金调整部分，以及在每次息票支付后的帐面值。考虑一项 C 等于 1 的债券，息票等于 g，价格等于 $1+p$（其中 p 可正可负）。表 7.1 是此债券的债券分期偿还表。

考虑债券的第一息票时期。在第一息票时期之末从此时期初余额所赚得的利息为

$$I_1 = i[1+(g-i)a_{\overline{n}|i}].$$

总息票 g 中的余下部分，即

$$P_1 = g - i[1+(g-i)a_{\overline{n}|i}] = (g-i)(1-ia_{\overline{n}|i}) = (g-i)v^n$$

表 7.1　一项 \$1 的 n 个时期债券的分期偿还表（息票 g，购买收益率 i）

时期	息票	赚得利息
0		
1	g	$i[1+(g-i)a_{\overline{n}\|i}]$
2	g	$i[1+(g-i)a_{\overline{n-1}\|i}]$
⋮	⋮	⋮
t	g	$i[1+(g-i)a_{\overline{n-t+1}\|i}]$
⋮	⋮	⋮
$n-1$	g	$i[1+(g-i)a_{\overline{2}\|i}]$
n	g	$i[1+(g-i)a_{\overline{1}\|i}]$
总额	ng	$ng-p$

时期	本金调整
0	
1	$g-i[1+(g-i)a_{\overline{n}\vert i}]=(g-i)v^n$
2	$g-i[1+(g-i)a_{\overline{n-1}\vert i}]=(g-i)v^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
t	$g-i[1+(g-i)a_{\overline{n-t+1}\vert i}]=(g-i)v^{n-t+1}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$g-i[1+(g-i)a_{\overline{2}\vert i}]=(g-i)v^2$
n	$g-i[1+(g-i)a_{\overline{1}\vert i}]=(g-i)v$
总额	$(g-i)a_{\overline{n}\vert i}=p$

时期	帐面值
0	$1+p=1+(g-i)a_{\overline{n}\vert i}$
1	$[1+(g-i)a_{\overline{n}\vert i}]-(g-i)v^n=1+(g-i)a_{\overline{n-1}\vert i}$
2	$[1+(g-i)a_{\overline{n-1}\vert i}]-(g-i)v^{n-1}=1+(g-i)a_{\overline{n-2}\vert i}$
$\vdots$	$\vdots$
t	$[1+(g-i)a_{\overline{n-t+1}\vert i}]-(g-i)v^{n-t+1}=1+(g-i)a_{\overline{n-t}\vert i}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$[1+(g-i)a_{\overline{2}\vert i}]-(g-i)v^2=1+(g-i)a_{\overline{1}\vert i}$
n	$[1+(g-i)a_{\overline{1}\vert i}]-(g-i)v=1$
总额	

必须用来调整帐面值。此时期末的帐面值应等于此时期初的帐面值减去本金调整金额，即

$$B_1=[1+(g-i)a_{\overline{n}\vert i}]-(g-i)v^n=1+(g-i)a_{\overline{n-1}\vert i}.$$

表中其余相继各行也照此推得。

还可以看到其他几点。首先，帐面值与据 (7.2) 式按原始收益率计算的价格相一致。其次，本金调整这一列的和等于 p，即溢价或折扣的金额。第三，支付利息这一列的和等于息票之和与本金调整列之和的差。从代数上证明这种结果留作习题。第四，本金调整列是一个具公比 $1+i$ 的几何级数。这样，要找到任何一个本金调整金额就是一件简单的事，只要知道另外某次的本金调整金额和收益率就可以了。

当一项债券以溢价购买，则帐面值会逐渐向下调整。这一过程称为 溢价分期 或 帐面下降 。在此情形下，本金调整金额常被称为"溢价分期金额"。

当一项债券以折扣购买，则帐面值会逐渐向上调整。这一过程通常称为 折扣分期 或 帐面上升 。在此情形下，本金调整金额常被称为"折扣分期金额"。

应当注意，表 7.1 是基于 $C = 1$ 。表中各值将与其他 C 值成比例。在任何情形下，债券分期偿还表总是可以根据基本原理来构造的。

作为一个溢价购买债券的例子，考虑一项面值 \$1000 的两年期 8% 债券，附有半年度息票，购买收益率为半年度转换 6% 。据计算此债券的价格为 \$1037.17, 半年度息票为 \$40 。表 7.2 是此例的分期偿还表。

表 7.2　\$1000 两年期附半年度 8% 息票的债券分期偿还表 (购买收益率半年度 6%)

半年	息票	赚得利息	溢价分期金额	帐面值
0				1037.17
1	40.00	31.12	8.88	1028.29
2	40.00	30.85	9.15	1019.14
3	40.00	30.57	9.43	1009.71
4	40.00	30.29	9.71	1000.00
总和	160.00	122.83	37.17	

在表 7.2 的第一行我们有如下计算。第一次息票中赚得的利息部分为

$$I_1 = iB_0 = 0.03(1037.17) = \$31.12.$$

第一次息票的本金调整部分为

$$P_1 = Fr - I_1 = 40.00 - 31.12 = \$8.88.$$

第一时期之末的帐面值为

$$B_1 = B_0 - P_1 = 1037.17 - 8.88 = \$1028.29.$$

相继各行也类似地计算。

作为一个用折扣购买的债券的例子，同样考虑票面值 \$1000 的两年期 8% 债券，附有半年期息票，购买收益率为半年度转换 10%，债券的价格算得为 \$964.54，半年度息票为 \$40 。表 7.3 是这一例子的债券分期偿还表，请读者校核表中各项。

表 7.3　\$1000 两年期附半年度 8% 息票的债券分期偿还表
(购买收益率半年度 10%)

半年	息票	赚得利息	折扣分期金额	帐面值
0				964.54
1	40.00	48.23	8.23	972.77
2	40.00	48.64	8.64	981.41
3	40.00	49.07	9.07	990.48
4	40.00	49.52	9.52	1000.00
总和	160.00	195.46	35.46	

应该注意折扣分期金额实际上是表 7.3 中所示数值的负数，即它们应是对帐面值的增加而不是减少。然而，通常将它们写成正的以避免减号。因此，当读者看到任何一张债券分期偿还表时应仔细确定此债券是以溢价还是折扣购买的，这样在本金调整列中的各项才能得到适当的解释。

也应注意，如果需要确定任何一张息票赚得的利息或本金调整部分，则并不一定要构造整个分期偿还表。所求的这一时期开始时的帐面值等于那个时刻按原始收益率计算的价格（它几乎肯定会不同于当前市场上的价格），并可用 7.3 节中的方法决定。这样就可算出表上的一行。

本节讨论的债券分期偿还表是与第六章中叙述的分期偿还表密切相关的。由偿债基金方法可得到债券分期偿还表的进一步理解。

例如，在表 7.2 中投资者可被认为是投资了 \$1037.17，对其有半年度回收 \$31.12 。这留下每时期 \$8.88 放入一偿债基金以偿还为债券所付的溢价，因为溢价在偿还时是有损失的。如果偿债

基金可按收益率投资，则偿债基金在两年之末的余额为

$$8.88s_{\overline{4}|0.03} = (8.88)(4.1836) = \$37.15,$$

它是溢价的金额 (有 .02 的舍入误差) 。例 7.4 展示了一种偿债基金利率与收益率不同的情形。

类似地，在表 7.3 中我们有

$$8.23s_{\overline{4}|0.05} = (8.23)(4.3101) = \$35.47,$$

它就是折扣的金额 (有 .01 的舍入误差) 。应注意在此情形下，偿债基金为负偿债基金。

另一个使帐面值上升或下降的方法是 直线方法 。这种方法并不产生同复利一致的结果，然而，它很易于应用。

在直线方法中帐面值是线性的，作成一个从 $P = B_0$ 到 $C = B_n$ 的坡度。这样，本金调整列是常数

$$P_t = \frac{P-C}{n} \quad 对 t = 1, 2, \cdots, n. \tag{7.7}$$

注意对溢价债券 $P_t > 0$, 而对折扣债券 $P_t < 0$ 。赚得利息的列亦为常数

$$I_t = Fr - P_t \quad 对 t = 1, 2, \cdots, n. \tag{7.8}$$

直线方法还有一些性质见习题。显然，溢价或折扣的金额越大，债券期限越长，此方法的误差就越大。

直线方法在 7.6 节中还将用到，那时将用它来导出一个与决定债券的未知收益率有关的公式。

例 7.4　一项票面值 \$1000 两年期 8% 的债券，附有半年期息票，购买收益率为半年度转换 6% 。如投资者能用一利率为半年度转换 5% 的偿债基金来偿还资金，求购买价格。

此项债券将以溢价出售，即 $P > 1000$，半年度息票为 \$40，赚得利息为 $.03P$。此差值将置于一偿债基金，并最后积累到溢价金额。这样，基本求值方程为

$$(40-0.03P)s_{\overline{4}|0.025}=P-1000$$

或

$$P=\frac{1000+40s_{\overline{4}|0.025}}{1+0.03s_{\overline{4}|0.025}}=\frac{1000+(40)(4.1525)}{1+(0.03)(4.1525)}=\$1036.93.$$

这一价格小于表 7.2 中的债券。读者可用寻常的推理来比较这两个价格的大小。一般而言，债券在这些条件下的价格由下式给出

$$P=\frac{C(1+gs_{\overline{n}|j})}{1+is_{\overline{n}|j}}, \tag{7.9}$$

其中 i 为利息的收益率，而 j 是偿债基金利率。

§7.5 息付日之间的价值确定

前面各节均假设，债券的价格或帐面值是恰在息票被支付之后计算的。还需考虑在息付日之间的价格与帐面值。

设 B_t 和 B_{t+1} 是两个相邻的息付日的债券价格或帐面值。令 Fr 为息票金额。作为习题，请读者证明递推公式

$$B_{t+1}=B_t(1+i)-Fr, \tag{7.10}$$

其中假设在此时段中有常数收益率 i。我们来分析 B_{t+k} $(0<k<1)$ 的形态。

当一债券在息付日之间购买时，需要将当前周期的息票在原持有者和新持有者之间分配。因为新持有者在此时期之末将收受整个息票，所以购买价格中应包括付给原持有者相应于从上次付

息日起至购买日为止这一段时间所占息票部分的金额。此值称为应计票息，并记为 Fr_k 。显然，在这一时段的两端应有 $Fr_0 = 0$ 及 $Fr_1 = Fr$，其中 Fr_1 是恰在息票被支付后计算。

我们将债券在出售那天的实际转手价格 (忽略手续费) 定义为债券的*无息价格*，并记为 B^f_{t+k}，并将不包含应计票息的价格称为债券的*市场价格*，记为 B^m_{t+k} 。显然有

$$B^f_{t+k} = B^m_{t+k} + Fr_k \quad 对 0 < k < 1. \tag{7.11}$$

在实际中，债券价格是用市场价格加应计票息开价的。我们将会看到，这会引向市场价格的一个光滑的序列 (假设收益率为常数 i) 。

无息价格与市场价格间的关系见图 7.1 。此图引用了表 7.3 中债券的帐面值作为价格。无息价格用实线表示，而市场价格用点线表示。任何日期的应计票息等于实线与点线间的垂直距离。

债券的帐面值是在购买该债券后给定的资产值。帐面值通常等于按购买之日的原始收益率计算的市场价值。当然，这些值很可能不等于当前若重新购买债券的市场价。如果事情确是这样，则任何应计票息在债券拥有者的金融文件中必须分开处理。

有三种方法可用来计算 (7.11) 式中的值。注意息付日的这些值是已知的，所以三种方法的差别仅出现于息付日之间的中间值。

第一种方法是基于复利的精确方法，常称为*理论方法*。中间日期的无息价格是将前一个息付日的值按收益率的复利积累到分数时期，即

$$B^f_{t+k} = B_t(1+i)^k. \tag{7.12}$$

应计票息则按 (3.22) 计算，

$$Fr_k = Fr\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]. \tag{7.13}$$

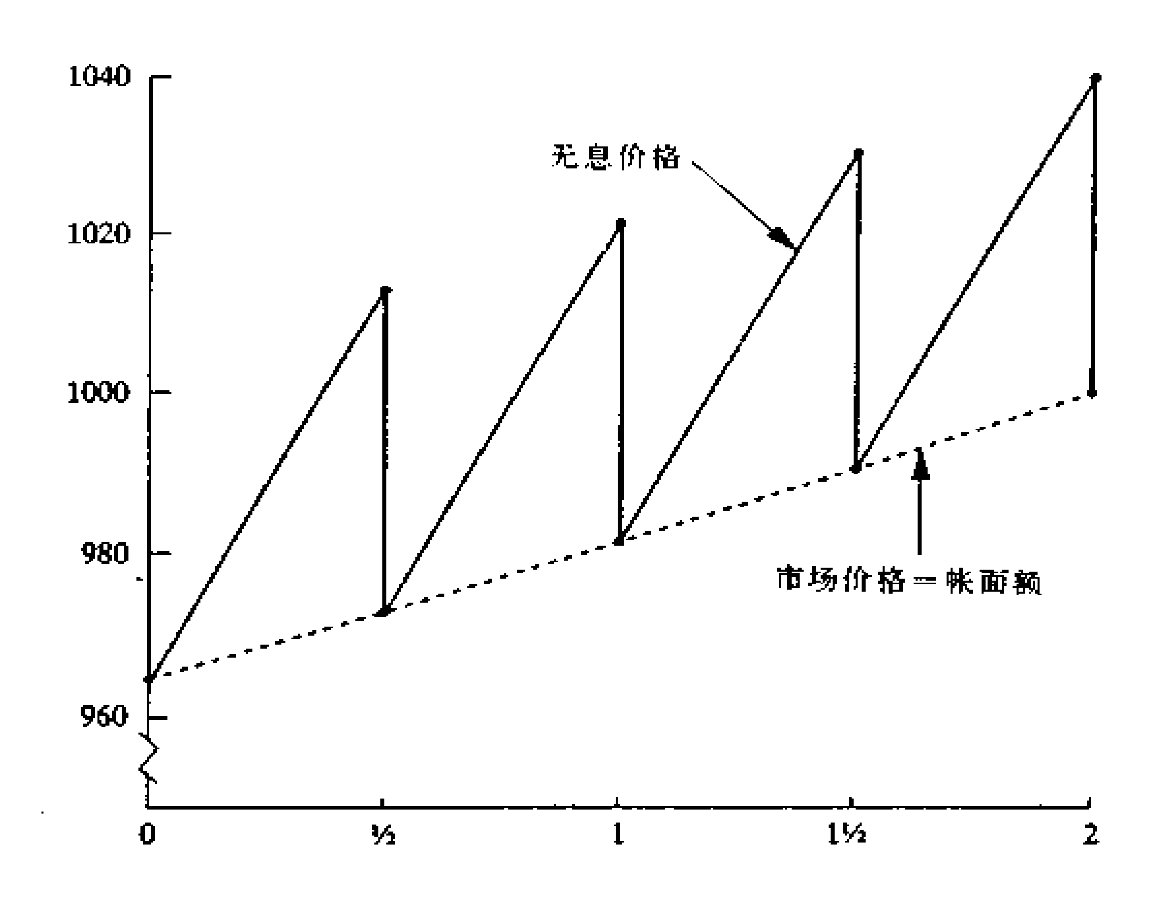


图 7.1 无息价格与市场价格的比较

于是市场价格或帐面值就是其差

$$B_{t+k}^{m}=B_t(1+i)^k-Fr\left[\frac{(1+i)^k-1}{i}\right]. \tag{7.14}$$

第二种方法是基于对中间时期取单利的近似方法，常称为实践方法。无息价格是按照对 (7.12) 的单利近似来决定的：

$$B_{t+k}^{f}=B_t(1+ki). \tag{7.15}$$

可以使用的另一种方法是：在时期之初的值 B_t 与时期之末

恰支付下一次息票前的值 $B_{t+1}+Fr$ 之间作线性插值。从而有

$$B^f_{t+k}=[(1-k)B_t+kB_{t+1}]+kFr. \tag{7.16}$$

作为习题，请证明 (7.15) 与 (7.16) 是等价的。

应计票息是将息票按比例分配

$$Fr_k=kFr. \tag{7.17}$$

市场价格或帐面值则是其差

$$B^m_{t+k}=B_t(1+ki)-kFr \tag{7.18}$$

或

$$=(1-k)B_t+kB_{t+1}. \tag{7.19}$$

(7.18) 式是基于 (7.15) 式，而 (7.19) 式是基于 (7.16) 式。

第三种方法是上述两种方法的混合，并常称为*半理论方法*。在此方法下，无息价格与理论方法相同，即

$$B^f_{t+k}=B_t(1+i)^k. \tag{7.12}$$

然而应计票息则与实践方法相同，即

$$Fr_k=kFr. \tag{7.17}$$

这样，市场价格或帐面值为其差

$$B^m_{t+k}=B_t(1+i)^k-kFr. \tag{7.20}$$

本质上，这种方法的帐面值是按复利计算的，而应计票息则是按线性比例即单利计算的。

半理论方法有一个明显的脱离常轨之处。考虑一种 $i=g$ 及 $P=C$ 的债券。对它不存在分期溢价或分期折扣，因此在所有息

付日帐面值应是相等的。由此合乎逻辑的结论是，对这种债券所有中间日期的帐面值也应等于同一值。这一性质对于头两种方法是成立的，但对半理论方法则不成立。

尽管半理论方法有概念上的不一致性，这种方法仍是在实践中应用最广的一种方法。在 1973 年美国证券业联合会出版了一本题为 证券标准计算法 的手册。这本手册的目的是将计算证券的价格和收益的计算方法标准化。这本手册认可对偿还期限长于六个月的债券计算采用半理论算法。

为方便参阅，下面的表 7.4 总结了所有三种方法的公式。

表 7.4 三种不同方法计算的息付日之间证券值

	无息价格 B^f_{t+k}	应计票息 Fr_k	市场价格 B^m_{t+k}
理论方法	$B_t(1+i)^k$	$Fr\left[\frac{(1+i)^k-1}{i}\right]$	$B_t(1+i)^k - Fr\left[\frac{(1+i)^k-1}{i}\right]$
实践方法	$B_t(1+ki)$	kFr	$B_t(1+ki) - kFr$
半理论方法	$B_t(1+i)^k$	kFr	$B_t(1+i)^k - kFr$

在金融市场上计算债券价格时，k 的值是基于在 2.3 节所述那样计算实际天数，实际 / 实际和 30/360 方法都被使用过。

读者应注意图 7.1 是配合实践方法绘制的，即无息价格和市场价格在每个息票支付时期内都是线性的 (后者在整个债券业务期间是分段线性的)。另外两种方法的图形稍有不同，但息付日的值是相等的。

要考虑的最后一个问题是息付日之间溢价或折扣的金额。显然这些值应该基于市场价格或帐面值而不是无息价格。例如，一份票面值 \$1000, 市场价格 \$980 及应计票息为 \$30 的债券仍然是折扣债券，尽管它是以 \$1010 出售的。

这样我们有

$$溢价 = B^m_{t+k} - C \quad 如果 g > i \tag{7.21}$$

及

$$\text{折扣} = C - B^m_{t+k} \quad \text{如果} i > g. \tag{7.22}$$

对此 B^m_{t+k} 可以由上述三种方法中的任一种来计算。

例 7.5 计算表 7.2 中在购买债券后 5 个月的无息价格，应计票息和市场价格 (帐面值)。用所有三种方法。

为展示三种方法的方便，置 $k = 5/6$。对理论方法，有

$$\begin{aligned} B^f_{5/6} &= 1037.17(1.03)^{5/6} = \$1063.04, \\ Fr_{5/6} &= 40\left[\frac{(1.03)^{5/6}-1}{0.03}\right] = \$33.25, \\ B^m_{5/6} &= 1063.04 - 33.25 = \$1029.79. \end{aligned}$$

对实践方法，有

$$\begin{aligned} B^f_{5/6} &= 1037.17\left[1 + \frac{5}{6}(0.03)\right] = \$1063.10, \\ Fr_{5/6} &= \frac{5}{6}(40) = \$33.33, \\ B^m_{5/6} &= 1063.10 - 33.33 = \$1029.77. \end{aligned}$$

对于半理论方法，有

$$\begin{aligned} B^f_{5/6} &= \$1063.04, \\ Fr_{5/6} &= \$33.33, \\ B^m_{5/6} &= \$1029.71. \end{aligned}$$

在实践中，实际天数的点数是基于购买的日历日期。为举例起见，假设此债券的发行和偿还日期为 1 月 1 日，但它的购买日期为 6 月 1 日。使用具有现成金融函数的袖珍计算器给出以下解答：

$$B^f_k = \$1063.06,$$

$$\begin{aligned} Fr_k &= \$33.37, \\ B_k^m &= \$1029.69. \end{aligned}$$

在此年头五个月的天数为 151, 而头六个月的天数是 181 。读者可校核一下，在半理论方法的公式中用 $k = 151/181$ 就得到上述解答。这样，天数是实际 / 实际基础上点数的。

§7.6 收益率的确定

正如 7.1 节中所提到的，本章所考虑的三个基本问题之一是：在给定一种证券的购买价格之后，如何确定投资者的收益率。本节对债券讨论此问题。

一项债券到期收益的确定类似于 3.8 节中讨论的年金的未知利率的确定。首先考虑一项在息付日购买的债券 (在息票刚被支付后) 的收益率。

一种方法是在 *债券表* 中进行线性插值。这些债券表是对一大类各种期限、息票率和收益率的债券价格表。由于配有金融软件的计算机和具有现成金融函数的袖珍计算器的广泛应用，这种方法已经不象以前那样大量使用了，但在实践中仍是有用的。在本书中我们将不使用这种方法。

另一种方法是通过代数方法建立收益率的近似公式。让我们从公式 (7.2) 开始

$$\begin{aligned} P &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|} \\ &= C + C(g - i)a_{\overline{n}|}, \end{aligned} \qquad (7.2)$$

并置 $k = \frac{P-C}{C}$, 有

$$(g - i)a_{\overline{n}|} = \frac{P - C}{C} = k$$

或

$$i = g - \frac{k}{a_{\overline{n}|}}. \tag{7.23}$$

为了从 (7.23) 中解 i, 可以用公式 (3.25)

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}i + \frac{n^2-1}{12}i^2 + \cdots\right]. \tag{3.25}$$

忽略对 i 高于一次的项，则 (7.23) 式变为

$$\begin{aligned} i &= g - \frac{k}{a_{\overline{n}|}} \\ &\doteq g - \frac{k}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}i\right]. \end{aligned}$$

从中解 i 有

$$i \doteq \frac{g - \frac{k}{n}}{1 + \frac{n+1}{2n}k}. \tag{7.24}$$

(7.24) 式有一个有趣的字面解释。债券值需要分期偿还的金额是每个偿还值单位 k 。因为共有 n 个时期，故每个时期中每偿还值单位的平均本金调整金额为 k/n 。这样，每张息票中的利息部分近似为 $g - k/n$ 。每个偿还值单位，平均投资金额是每个时期原始帐面值的平均，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{n}{n}k\right) + \left(1 + \frac{n-1}{n}k\right) + \quad \cdots \quad + \left(1 + \frac{2}{n}k\right) + \left(1 + \frac{1}{n}k\right)\right] \\ = \quad 1 + \frac{n+1}{2n}k. \end{aligned}$$

这样，公式 (7.24) 式还可以解释为平均回收利息被平均投资金额去除。

对 (7.24) 式还可以看一看两件有趣的事情。首先，此式与 (3.29) 式密切相关。

$$i \doteq \frac{2(n-k)}{k(n+1)}. \tag{3.29}$$

将上式分子和分母同除以 $2n$, (3.29) 式便变为

$$i \doteq \frac{1-\frac{k}{n}}{\frac{n+1}{2n}k}. \tag{3.29a}$$

(3.29a) 式有一个字面解释，它与一笔金额为 $a_{\overline{n}|}=k$ 在 n 个时期内每时期末付款 1 来偿还的贷款分期偿还表相联系。这一字面解释类似于上述 (7.24) 式的字面解释。

其次，上述 (7.24) 式的字面解释视帐面值为线性。这与 7.4 节中叙述的帐面上升或下降的直线方法的假设是相同的。

(7.24) 式形成了另一个甚至更简单的计算近似收益率方法的基础，那个方法叫做 债券推销员方法 。此方法在 (7.24) 式中将 $(n+1)/2n$ 用 1/2 去代替，得到

$$i \doteq \frac{g-\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{2}k}. \tag{7.25}$$

一般说来， (7.25) 式的精确程度不及 (7.24) 式。

(7.24) 和 (7.25) 式都易于应用，因为它们不需要计算利息函数或查对利息表。如要使用迭代法得到更精确的解答，则它们也提供了很好的初始值。

利用迭代法可以决定未知收益率到任意需要的精度。用 (7.23) 式就可直接得到一个简单而有较好收敛速度的 ad hoc 方法。

Newton —Raphson 迭代法提供了确定债券收益率的更强有力的方法。由此方法，得到的债券收益率迭代公式为

$$i_{s+1}=i_s\left[1+\frac{ga_{\overline{n}|}+v^n-\frac{P}{C}}{ga_{\overline{n}|}+(i_s-g)nv^{n+1}}\right], \tag{7.26}$$

其中利息函数按利率 i_s 计算。(7.26) 式的导出留作习题。(7.26) 式比较复杂，如只作少量计算可能不值得如此麻烦。但如需要作大量计算，则这是一个很好的方法，因为它确有很快的收敛速度。

其次，我们来考虑如何确定在息付日之间购买的债券收益率。这由于下一次息付日之前有分数个时期而需要进行更复杂的迭代。

在实践中经常用的程序是一种组合，即在分数时期的余下部分应用 7.5 节中叙述的半理论方法，而从此点向前则用一正规公式。由迭代法可以确定满足这两部分的总体收益率到需要的精度。

上述迭代在数学上显然很复杂，最好用计算机进行。带有现成金融函数的袖珍计算器也能直接进行这种迭代。此方法可见例 7.7 。

到现在为止，我们在第七章中计算收益率 i 是忽略再投资率的，但实际上债券投资人需要考虑债券息票的再投资率，如果投资者只能以低于 i 的利率将息票再投资，则 i 实际上是将应该计入再投资率的实际收益率夸大了。反之若投资者运气好，能将息票以高于 i 的利率再投资，则总体收益率实际上应超过 i 。

考虑这样的情况：一项债券以价格 P 购买，在 n 个时期内每个时期末付息票 Fr, 债券在第 n 时期末偿还 C, 息票以利率 j 再投资。如果我们记考虑了再投资的收益率为 i' (以与 i 相区别)，则 i' 应满足以下求值方程

$$P(1+i')^n = Frs_{\overline{n}|j} + C. \tag{7.27}$$

因等式两边都表示投资在 n 个时期末之值。一个考虑了再投资率的收益率的例子见例 7.8 。

近年来无息票债券相当流行的理由之一是这些债券不存在再投资的风险。因为没有息票去再投资，收益率锁定在购买日的水平。

实际应用中最后考虑的一件事是费用的效应。如果在买卖债券时包含有佣金与其他费用，则实际收益率将会降低。然而，前面所描述的程序可以很容易地用来反映这些费用。这可以这样处

理：购买时的费用使购买价增加，出售时的费用使出售价降低。应该注意当债券到期或偿还时是不另收费用的。

例 7.6　一项面值 \$100 10 年期带有半年期 8% 息票的债券以 \$90 出售。求半年期转换收益率。

使用本节中讨论的方法，有

$$k = \frac{P-C}{C} = \frac{90-100}{100} = -0.1.$$

债券销售员方法公式 (7.25) 给出下列半年度收益率近似式

$$i = \frac{0.04 + \frac{0.1}{20}}{1 + (0.5)(-0.1)} = 0.0474,$$

即 4.74% 或半年度转换 9.48% 。

更精细的公式 (7.24) 给出

$$i = \frac{0.04 + \frac{0.1}{20}}{1 + \left[\frac{21}{40}\right](-0.1)} = 0.0475$$

即 4.75% 或半年度转换 9.5%, 它更接近于真实收益率。

其次，改用伴随公式 (7.23) 的 ad hoc 迭代法，其初始值用 $i_0 = 0.0475$ 。得到下列序列：

$$\begin{aligned} i_0 &= 0.0475, \\ i_1 &= 0.04786, \\ i_2 &= 0.04788, \\ i_3 &= 0.04788. \end{aligned}$$

这样，半年度转换收益率为 $2(0.04788) = 0.09576$ 或 9.576% 。正如预期，公式 (7.24) 比 (7.25) 更准确。使用这种 ad hoc 方法的收敛速度是可以接受的。

最后，让我们用 Newton —Raphson 方法 (公式 (7.26)) 。因为这种方法是如此强有力，使我们得以将计算精度提高两位小数。得到下列序列

$$\begin{aligned} i_0 &= 0.0475, \\ i_1 &= 0.04788, \\ i_2 &= 0.0478807, \\ i_3 &= 0.0478807. \end{aligned}$$

这样,半年度转换收益率为 $2(0.0478807) = 0.0957614$ 或 9.57614% 。这一结果可用带有现成金融函数的袖珍计算器得到验证。

例 7.7　假设例 7.6 中的债券在 3 月 1 日发行。两年后的 5 月 15 日该债券市场价格为 \$88, 试计算在这一天购买债券的收益率。

用带金融函数的袖珍计算器算得答案为 10.2694% 。现在我们试图验证这一答案。恰在 3 月 1 日前按 10.2694% 半年转换的收益率购买此债券的价格经计算为 \$87.8194 。从 3 月 1 日到 5 月 15 日的天数为 75, 而从 3 月 1 日到 9 月 1 日的天数为 184 。由公式 (7.20), 半理论公式导致

$$87.8194(1.051347)^{75/184} - \frac{75}{184} \cdot 4 = 87.9998,$$

这与应有的价格 \$88 只有 .0002 的舍入误差。

由此例可明显看到用袖珍计算器来计算债券收益率显然是很方便的。

例 7.8　假设例 7.6 中债券的息票只能以半年度转换 6% 的利率再投资。求计及再投资率的收益率。

直接应用 (7.27) 式给出

$$90(1+i')^{20} = 4s_{\overline{20}|0.03} + 100$$

或

$$(1+i')^{20} = \frac{(4)(26.8704)+100}{90} = 2.30535.$$

从中可解出 $i' = 0.04265$ 。计入再投资率的收益率为 $2(0.04265) = 0.0853$ 或 8.53% 。这样，如果息票只能以 6% 的利率再投资，则表面的收益率 9.58% 将降低为 8.53% 。

§7.7 通知偿还债券

所谓*通知偿还债券*是这样一种债券，其借款人可以选择在到期日之前偿还。最早的这种通知偿还日一般在发行日以后数年。

通知偿还债券提出了如何计算价格和收益率的问题，因为债券的期限是不确定的。由于借款人可以选择要不要通知偿还，投资人一般应假设借款人会在对投资人不利的时机实行这一选择，并按此计算价格或收益率。

假如偿还值在所有偿还日期 (包括到期日) 都相等，则基本原理应用起来是比较简单的。应遵循下列规则：

1. 假如收益率小于修正息票率，即债券以溢价出售，则假设偿还日是尽可能最早的日期。

2. 假如收益率大于修正息票率，即债券以折扣出售，则假设偿还日是尽可能最晚的日期。

上述规则的合理性是明显的。在第一种情形偿还时会有损失，因为债券是以溢价购买的。最不情愿发生的情况就是损失发生得尽量早。在第二种情形偿还时有所得益，因为债券是以折扣购买的，此时最不情愿发生的情况就是得益尽量晚。

假如在所有偿还日 (包括到期日) 的偿还值是不相等的，则上述原则用起来较为困难。一般说来，需要进行一些对各种偿还日期的试探计算，从中看出哪一个是投资者最不欢迎的。此最不欢迎日期不一定是最早或最晚的偿还日期。最不欢迎通知偿还日是那种按投资者的收益率产生最小购买价的日期。例 7.9 就展示了

这种情况。

应该指出，如果一项通知偿还债券在与原先假定不同的日期偿还，则事后收益率会高于原先的计算。然而，在此情形下原始购买价和期限都是固定的，从而 7.6 节的方法可直接用来决定投资者实际得到的收益率。

还应注意上述讨论忽略了再投资率的影响。这是一件重要的事情，因为我们是在比较不同时间区段中的收益率。如同在 5.2 节所见，用收益率比较不同时间区段中的业务可能会导致有缺陷的比较。

这样，在实际工作中进行通知偿还债券的计算时希望读者能考虑再投资率的效应。这需要在建立公式 (7.27) 的过程中进行分析。

例 7.9 有一种 \$100 票面值的 4% 债券，附有半年期息票，它可从发行后 5 年开始在随后 5 年内任何息付日按 \$109 通知偿还，也可从发行后 10 年开始在随后 5 年内按 \$104.50 通知偿还，而在第 15 年末则以 \$100 到期偿还。如一投资者要保证得到 (1) 5% 半年度转换的收益率，或 (2) 3% 半年度转换的收益率，他能付的最高价格是多少？

1. 假如收益率为 5%，则显然可能最晚的偿还日期对投资者是最不欢迎的，因为债券将以折扣出售。

这样，价格为

$$100 + (2 - 2.50)a_{\overline{30}|0.025} = 100 - (0.50)(20.9303) = \$89.53.$$

2. 假如收益率为 3%，则哪个偿还日期最不受欢迎并不很明显，因为债券将以溢价出售。价格将是

$$109.00 + (2 - 1.6350)a_{\overline{n}|0.015} \quad 对于 \quad n = 10, 11, \cdots, 19,$$

$$104.50 + (2 - 1.5675)a_{\overline{n}|0.015} \quad 对于 \quad n = 20, 21, \cdots, 29,$$

$$100.00 + (2 - 1.5000)a_{\overline{n}|0.015} \quad 对于 \quad n = 30.$$

显然，在上述每一段中最低价格将发生在 n 最小时，即 $n=10$, 20 和 30 时。因此，只需比较下列各价格：

$$\begin{aligned}
109.00+(0.3650)a_{\overline{10}|0.015} &= 109.00+(0.3650)(9.2222)=\$112.37,\\
104.50+(0.4325)a_{\overline{20}|0.015} &= 104.50+(0.4325)(17.1686)=\$111.93,\\
100.00+(0.5000)a_{\overline{30}|0.015} &= 100.00+(0.5000)(24.0158)=\$112.01.
\end{aligned}$$

最低价格 \$111.93 发生在 $n=20$, 即发行后 10 年偿还。本例显示，当所有可能偿还日期的偿还值不相同时，最不欢迎的偿还日期可以发生在最早可能偿还日和最后可能偿还日之间。在实践中常常会发生的一种情况是：通知偿还债券的偿还值随着债券期限的加长而减少，本例就是这样。偿还值超过票面值的部分 (在本例中为 \$9 和 \$4.50) 常称为 *通知偿还溢价* 。

§7.8　分期偿还债券

在 7.2 节中提到，一位借款人如需要大量资金，可以发行一系列具有互相错开的偿还期的债券，而不是用一个共同的到期日，这种债券称为 *分期偿还债券*, 并在本节中进一步讨论。

如果该系列中每一个债券的偿还日期都已知道，则任一债券的计算可以用前面已经叙述过的方法来完成。整个系列债券的值只不过是各个债券之值的和。然而，下面将指出可以用更有效的方法来求整个系列债券的值。

在某些情形下，在逐个偿还日期要偿还的债券并不预先知道而是随机地选择。这样任一债券的值就不能事先确定，因为其偿还日期依赖于机会。但整个系列债券的值却可以肯定地决定下来。

分期偿还债券的计算用 Makeham 公式来进行最为有效：

$$P=K+\frac{g}{i}(C-K). \tag{7.4}$$

假设分期偿还债券在 m 个不同的偿还日期偿还。将第一次偿还日的购买价，偿还值及偿还值的现时值记为 P_1, C_1 与 K_1; 第二次偿还日的以上各值记为 P_2, C_2 与 K_2; 如此等等，直至最后一次偿还日的以上各值记为 P_m, C_m, 与 K_m 。则有

$$\begin{aligned}
P_1 &= K_1 + \frac{g}{i}(C_1 - K_1), \\
P_2 &= K_2 + \frac{g}{i}(C_2 - K_2), \\
&\vdots \qquad \vdots \\
P_m &= K_m + \frac{g}{i}(C_m - K_m).
\end{aligned}$$

求和可得

$$P' = K' + \frac{g}{i}(C' - K'), \tag{7.28}$$

其中

$$\begin{aligned}
P' &= \sum_{t=1}^{m} P_t, \\
C' &= \sum_{t=1}^{m} C_t, \\
K' &= \sum_{t=1}^{m} K_t.
\end{aligned}$$

请读者注意，符号 P_t 在 7.4 节中也用来表示第 t 次债券息票的本金调整金额。

这样，整个系列债券的价格可记为 P', 且由 (7.28) 式给出。这一公式通常比将各别债券的价格相加求和更为有效，因为 C' 和 K' 常常很易得到。和式 C' 只不过是整个系列债券偿还值的和，这是很容易得到的。如果债券是在正规的区段内以对称形式偿还的，则 K' 的形式也简单。在此情形下， K' 是一种年金的形式，并可能有一个简单的表达式。

例 7.10　有一项 \$1000 票面，$5\frac{1}{4}\%$ 息票率的债券，附有年度息票，将从发行之日后第 11 年末到第 20 年末以 10 次 \$105 的年度分期付款来偿还。债券购买时的实质收益率为 7% 。求其价格。

在此例中我们有

$$\begin{aligned}
F &= 100, \\
C &= 105, \\
r &= 0.0525, \\
g &= \frac{100}{105}(0.0525) = 0.05, \\
i &= 0.07, \\
C' &= 1050, \\
K' &= 105(v^{11} + v^{12} + \cdots + v^{20}) \\
&= 105(a_{\overline{20}|0.07} - a_{\overline{10}|0.07}) \\
&= 105(10.5940 - 7.0236) \\
&= 374.892.
\end{aligned}$$

故价格为

$$\begin{aligned}
P' &= 374.892 + \frac{0.05}{0.07}(1050 - 374.892) \\
&= \$857.11.
\end{aligned}$$

§7.9　某些推广

可以对已讨论的债券公式作某些推广。本节将叙述三方面的推广。应该强调，更一般的债券形式总能通过推广 (7.1) 式来处理，即分别求未来息票的现时值和偿还值的现时值，然后将两者相加。

本节中考虑的三方面推广是：(1) 收益率和息票率频率不同，(2) 息票率不等于常数及 (3) 收益率不等于常数。

收益率和息票率频率不同

首先考虑每个息票时期包含 k 个收益率转换时期的情形。设债券的期限为 n 个收益率转换时期。在每 k 个转换时期之末有一次支付息票 Fr 。这样，总共支付 n/k 次息票。这种债券的基本公式是

$$P = Fr\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}} + Cv^n. \tag{7.29}$$

在习题中还将对其他三种方法变换 (7.29) 式以求债券的价格。

其次，考虑每个收益率转移时期包含 m 个息票时期的情形。设债券期限为 n 个收益率转换时期。在每 $1/m$ 个转换时期之末将支付 Fr/m 的息票。这样，总共有 mn 次息票。对这种债券的基本公式为

$$P = Fra_{\overline{n}|}^{(m)} + Cv^n. \tag{7.30}$$

在习题中会对其他三种方法变换 (7.30) 式以求债券的价格。

息票率不等于常数

若息票率不为常数，则各次息票构成一变额年金。这一年金可用 4.6 节中建立的方法来计算。债券价格就是未来息票的现时值加上偿还值的现时值。此方法见例 7.11 。

收益率不等于常数

若收益率不为常数，则这种变化必须反映在未来息票与偿还值的现时值计算上。未来息票的现时值可用 3.9 节中建立的方法来计算。类似地，偿还值的现时值可用 1.10 节中建立的方法来计算。于是债券的价格就是未来息票的现时值加上偿还值的现时值。此方法见例 7.12 。

例 7.11　一企业决定发行一种通货膨胀调整债券，其票面值为 \$1000, 在 10 年内每年末有年度息票。初始息票率为 7%, 其后

每次息票比上次多 3% 。该债券在第 10 年之末归还 \$1200 。求一投资者想产生 9% 的实质收益率应付的购买价格。

利用 (4.39) 式，未来息票的现时值为

$$70\frac{1-\left[\frac{1.03}{1.09}\right]^{10}}{0.09-0.03}=504.368.$$

偿还值的现时值为

$$1200(1.09)^{-10}=506.893.$$

故债券价格为

$$504.368+506.893=\$1011.26.$$

例 7.12　对于例 7.3 中的债券，如果头 5 年的收益率为半年度转换 10%, 随后 5 年的收益率为半年度转换 9%, 求其价格。

未来息票的现时值为

$$\begin{aligned}&42[a_{\overline{10}|0.05}+(1.05)^{-10}a_{\overline{10}|0.045}]\\=\ &42[7.7217+(0.61391)(7.9127)]\\=\ &528.334.\end{aligned}$$

偿还值的现时值为

$$1050(1.05)^{-10}(1.045)^{-10}=415.082.$$

这样，债券的价格为 $528.334+415.082=\$943.42$ 。此价格高于例 7.3 中的价格，这符合预期，因为债券期间的后五年收益率较低。

§7.10　其他证券

以上各节限于讨论可偿还的债券。本节将讨论两种其他类型的证券：(1) 优先股与永久债券，及 (2) 普通股。

优先股与永久债券

优先股和永久债券是类似的。因为它们都是有固定收入而无偿还期的证券。故其价格必须等于未来永久的分红或息票的现时值，即分红或息票形成一永久年金。公式 (7.1) 在此情形下成为

$$P = \frac{Fr}{i}. \tag{7.31}$$

读者应留心有些优先股是有偿还期的。对这种优先股就要象前几节叙述的那样，当作债券去处理。

普通股

普通股提出了与以前不同的问题，因为它不是一种固定收入的证券，即分红并不预先知道，它们也不是等额的。在实践中，普通股在股票市场上的价格常常会因一些小小的表面的理由而上下波动。

在理论上，普通股的价格应该代表其未来分红的现时值。按此形式计算的值可以用所谓*分红贴现模型*来表征。当然，这种计算应该计及分红规模的预期变化。

考虑这样的情形：一家企业打算在当前时期之末支付红利 D 。假设分红预期会按公比为 $1+k$ 的几何级数无限地变化，而股票购买的收益率为每时期 i, 其中 $-1<k<i$ 。

于是，股票的理论价格可由公式 (4.39) 取极限 $n \to \infty$ 而得到，即

$$P = D\frac{1}{i-k}. \tag{7.32}$$

例 7.13 是这种类型理论计算的一个例子。请读者注意，符号 D 在 6.4 节中曾用来表示偿债基金储蓄。

要预计分红在未来无限增长的常数百分比可能不太现实，随着企业规模的增大和日益老化，其增长率一般会下降。例 7.14 提供了一个在这些条件下用分红贴现模型的例子。

在实践中，美国优先股和普通股最常见的分红频率是每季度一次。这与通常债券息票半年支付一次是不同的。

例 7.13　一项普通股当前利润为每股 \$4, 而在当年年底将支付每股 \$2 的分红。假设该企业的利润以每年 5% 的速度无限增长，且企业打算一直以 50% 的利润作为分红，如果投资者要有 (1) 10%, (2) 8% 及 (3) 6% 的年实质收益率，求理论价格。

1. 分红的现时值为

$$2\left[\frac{1}{0.10-0.05}\right]=\$40,$$

这样，理论价格为当前利润的 10 倍。

2. 分红的现时值为

$$2\left[\frac{1}{0.08-0.05}\right]=\$66\frac{2}{3},$$

即理论价格为当前利润的 $16\frac{2}{3}$ 倍。

3. 分红的现时值为

$$2\left[\frac{1}{0.06-0.05}\right]=\$200,$$

即理论价格为当前利润的 50 倍。

例 7.14　如果企业利润的增长在头 5 年为 5%, 其次 5 年为 $2\frac{1}{2}$%, 以后为 0%, 并假设年度实质收益率为 10%, 重做例 7.13 。

逐次应用 (4.39) 式给出

$$2\left[\frac{1-\left[\frac{1.05}{1.10}\right]^5}{0.10-0.05}\right] + 2\frac{(1.05)^5}{(1.10)^5}\left[\frac{1-\left[\frac{1.025}{1.10}\right]^5}{0.10-0.025}\right] + \frac{2(1.05)^5(1.025)^5}{(1.10)^{10}}\cdot\frac{1}{10}=\$25.72.$$

它大约为例 7.13(1) 中假设等速无限增长情形所得答案的 64% 。在此情形下，理论价格为当前利润的 6.43 倍。

§7.11 证券价值的确定

在 7.1 节中已提到过，本章要讨论的三个基本问题之一是，当购买证券后如何确定其价值。投资于证券的团体投资人，诸如保险公司和养老基金，必须在财务报告中对他们持有的证券赋值。对这些证券的资产值的评估各人常有不同的做法。

资产值的确定常反映所使用的会计原理，法律限制，以及传统方法，还有理论的考虑。确定价值的方法常随出现的情况而变。例如，同样的证券对一项养老基金和对一家保险公司可能有不同的报告资产值。定值方法也常随需要定值的证券的类型而变化，例如对债券和对普通股所用的方法就可能不同。

在实践中已建立了三种主要的确定资产值的方法。每种方法都有各种改进和修正。所有三种方法在当前确定各种情况下的证券价值中都被使用。

本节的目的并不是要对各种方法及其修正给出完整的描述，也并不是要对任何给定的情况确定该使用哪种方法，而只是要让读者简单地知道一下在实践中会碰到的这三种主要方法。

第一种方法是用 *市场价值* 作为资产值的度量。有几种观点相信市场价值是一种证券当前价值的唯一正确的度量。他们也认为市场价值是客观存在的且易于理解。读者应注意“市场价值”这一词在这里与在 7.5 节中有不同的用法。

市场价值的一个大缺点是它经常表现出可观的波动。这种资产值的不稳定常会带来严重的问题。因此产生了所谓修正市场价值方法。这些方法试图把纯市场方法中出现的那些波峰和波谷加以平滑。当然，这种修正市场价值方法会有一些任意性并且没有原来那样简明。市场价值方法对某些证券的另一个缺点是可能根

本不存在市场。例如所谓私募债券或抵押债券就根本不在市场上公开交易。

第二种方法是用原始*成本*作为资产值的度量。对于可偿还债券经常使用一种称为*调整成本*方法。这种调整成本方法相当于 7.4 节中所叙述的分期溢价或分期折扣的分期值。

一项资产的实际成本或调整成本常称为此项资产的*帐面值*，因为这是在投资者的帐面上赋予这项资产的值。市场值超过帐面值的部分称为*未实现资本盈利*，而帐面值超过市场值的部分称为*未实现资本亏损*。如果一项资产以超过帐面值的价格出售，则其利润称为*实现资本盈利*，而如果价格小于帐面值，其损失称为*实现资本亏损*。

分期偿还债券的未实现资本盈利和亏损在投资者的帐面上常被忽略，因为在理论上债券总是要持有到到期为止。在高利率时期，债券的帐面值实质上超过市场值；而在低利率时期则相反。

未实现和实现的资本盈利或亏损之间的区别是重要的，因为在交税时就会有不同的处理。例如在美国，实现资本盈利与亏损会对投资者的所得税返回发生影响；而未实现资本盈利与亏损则并不如此。

帐面值产生稳定的、客观的，且易于理解的资产值。当市场价值大于帐面值时，用帐面值也体现了保守性。然而，如果市场价值与帐面值分离，当市场价值大于帐面值时，则帐面值确实也倾向于越来越成为资产值的不现实估计，而且如果帐面值大于市场价值时，帐面值是非保守的。

第三种方法可称为*现时值方法*。按照此种方法，资产值等于该证券所有未来付款的现时值，其中现时值是按某个适当的利率计算。本章中已经对债券，优先股和普通股进行过这种类型的计算。

现时值方法有一优点，即整批业务可以在统一的基础上确定价值，因为在取所有现时值时可用相同的利率。当假设利率以计

算抵消资产的负债时，这一点特别重要。这些类型的例子有保险公司与养老基金，它们在计算许多债务价值时都要假设利率。资产与负债之间的关系是很重要的，它将在第九章中进一步讨论。

现时值方法对于取现时值时所用利率的选择十分敏感。它既是这个方法的优点也是缺点。这个方法是柔性的，但确实也由于计算现时值时利率的选择而有某种程度的任意性。现时值方法产生的资产值可与市场价值及帐面值明显不同。此方法与市场价值及帐面值相比也较难理解。

总之，没有一种证券定值方法是在所有情况下都使用的。读者在实践中遇到资产值时应仔细地确定计算方法。

证券定值方法的选定会影响计算的收益率。例如，在 5.5 节中曾指出公式 (5.14), 即

$$i \doteq \frac{2I}{A+B-I} \tag{5.14}$$

在计算一项投资基金所得的收益率时是经常使用的。 A 和 B 的值就依赖于所用的资产定值方法，而 I 也会因资本盈利是否包含在 I 中而有所变化。

习　题

§7.2　证券类型

1. 试确定一种无息票债券的价格，该债券在 10 年内按 \$1000 到期，并且

a) 产生 10% 的实质收益率.

b) 产生 9% 的实质收益率.

c) 如收益率减少 10%, 价格将增长多少百分比？

2. 一项 10 年期积累债券的票面值为 \$1000, 并有半年度转换复利 8% 。求使投资者得到 10% 实质收益率的购买价格。

3. 一项 26 周短期国库券在发行时以 \$9600 购买，到期偿还 \$10000 。求收益率：

a) 按贴现率计算，利用短期国库券的正规计点天数方法。

b) 按年度实质利率计算，假设投资时期恰为半年。

4. 短期国库券在到期时按贴现率计算收益 8% 。求 52 周短期国库券的年实质利率与 13 周短期国库券年实质利率之比。使用不包括计点天数的方法。

§7.3　债券的价格

5. 有一项 10 年期票面为 \$100 的债券，附有半年度支付的 10% 的息票，偿还值为 \$105 。购买此债券可产生半年度转换 8% 的收益率。求购买价格。并校核所有四种公式是否得到同样答案。

6. 对例 7.3, 求以下各项：

a) 基于面值的名义收益率。

b) 基于偿还值的名义收益率。

c) 当前收益率。

d) 到期收益率。

7. 两种面值均为 \$100 的债券都附有半年度支付的 8% 息票，现按面值出售。债券 A 在 5 年后按面值偿还，债券 B 在 10 年后按面值偿还。假定市场通行利率突然改变为半年度转换 10%,

a) 求债券 A 价格改变的百分比。

b) 求债券 B 价格改变的百分比。

c) 按通常推理来比较 a) 与 b) 答案的相对大小。

8. 两种 \$1000 的债券在相同时期之末按票面偿还，购买它们的收益率均为半年度转换 4% 。第一种债券售价为 \$1136.78, 半年度支付的息票率为 5%; 第二种债券的息票率为半年度支付 $2\frac{1}{2}$%, 求第二种债券的价格。

9. 一项 \$1000 债券有半年度支付 9% 的息票率，在经过未规定的年份后以 \$1125 偿还。购买本债券产生半年度转换 10% 的收益率。倘若按此收益率偿还值的现时值为 \$225, 求购买价格。

10. 一项票面值 \$1000 的 n 年期债券将在到期时按面值偿还，并有 \$100 的年度息票，此项债券的价格为 \$1110 。若 $K=450$，求基价 G 。

11. 一位投资者拥有票面值 \$1000，附半年度息票的 10% 债券。此债券将在第 10 年之末以面值到期偿还。投资者决定更情愿要一项 8 年期的债券。到期收益率为半年度转换 7% 。投资者用出售 10% 债券的收入去购买一项 6% 债券，它附有半年度息票，在第 8 年之末按面值到期。求 8 年期债券的面值。

12. 一项 n 年期 \$1000 票面的债券到期按面值偿还，且有半年度转换息票率 12% 。购买价使得可产生半年度转换 10% 的收益率。如债券期限加倍，售价将增加 \$50 。求此 n 年期债券的售价。

§7.4　溢价和折扣

13. 证明公式 (7.9) 当 $i=j$ 时回复到 (7.1) 式。

14. 用代数方法证明表 7.1 中支付利息一列的和等于 $ng-p$ 。

15. 在表 7.1 中第一时期的本金调整金额为 $(g-i)v^n$ 。试从偿债基金的观点，从字面上和代数上证明

$$[(g-i)v^n]s_{\overline{n}|}=p.$$

16. 对于一项 \$1 的债券，其息票率为收益率的 150%，而溢价为 p 。对另一项 \$1 的债券，它有相同的息票数和同样的收益率，息票率则是收益率的 75%，求第二种债券的价格。

17. 对一确定的时期，一项债券的分期偿还表显示溢价分期的金额为 \$5，而需要的利息为息票的 75%，求息票金额。

18. 一项 10 年期附半年度息票的债券以折扣购买，产生半年度转换 9% 的收益率。如果倒数第 2 期息票折扣分期的金额为 \$8，求债券分期偿还表中头 4 年折扣分期的总金额。

19. 有一项面值 \$1000 的 5 年期债券，附有半年度支付的息票率为 10%，按面值偿还。购买该债券产生的收益率为半年度转

换 12% 。求分期偿还表上利息支付列的总和。

20. a) 用直线方法求表 7.2 中债券的帐面值。

b) 用直线方法求表 7.3 中债券的帐面值。

c) 如将 a) 和 b) 的答案同表 7.2 和 7.3 中的真实值相比较，你能得到什么结论？

§7.5　息付日之间的价值确定

21. 导出公式 (7.10) 。

22. 证明 $B_{t+k}^{f}=(B_{t+1}+Fr)v^{1-k}$ 。

23. 证明公式 (7.15) 与 (7.16) 等价。

24. 求表 7.3 中债券的无息价格，应计票息及购买后 2 个月的市场价格 (帐面值) 。用所有三种方法。

25. 对三种中间债券价格方法按大小的上升次序排列：

a) 无息价格。

b) 市场价格 (帐面值) 。

§7.6　收益率的确定

26. 推导公式 (7.26)

27. 一项票面值 \$100, 附有 10% 半年度息票的 12 年期债券以 \$110 出售。求半年度转换收益率。

28. 对一位购买 27 题中的债券的投资者，如果其息票仅能以半年度转换 7% 再投资，重新计算其总体收益率。

29. 一位投资者买了两项 20 年期债券，每项都有半年度息票，也都是到期按面值偿还。对每种债券其购买价产生同样的收益率。一种债券票面值为 \$500 而息票为 \$45, 另一种则票面值为 \$1000 而息票为 \$30 。第一种债券的溢价金额 (元) 为第二种债券的折扣金额 (元) 的两倍。求半年度转换收益率。

30. 一项 \$100 附年度息票的债券在第 15 年之末按票面偿还。若购买价为 \$92, 则收益率恰比息票率高 1% 。求此债券的收益率。

§7.7　通知偿还债券

31. 一项票面值 \$1000 的债券附有 8% 半年度息票，并可在第 10 年之末到第 15 年之末间通知偿还，

a) 求产生半年度转换 6% 收益率的购买价格。

b) 求产生半年度转换 10% 收益率的购买价格。

32. 如果习题 31 b) 的债券实际上在第 10 年之末通知偿还，求债券持有人的收益率。

33. 一项票面值 \$1000 附季度息票的 8% 债券在发行后 5 年可通知偿还。债券在第 10 年之末到期偿还 \$1000，而出售时在不通知偿还的假设下产生季度转换 6% 的名义收益率。求第 5 年之末的偿还值，使得购买者得到同样的收益率。

34. 一项票面值 \$1000 附半年度息票的 4% 债券将在第 10 年之末到期。此债券可在第 4 年之末到 6 年之末以 \$1050 通知偿还，在第 7 年之末到第 9 年之末以 \$1025 通知偿还，在第 10 年之末以 \$1000 偿还。求一投资者能确保半年度 5% 收益率愿付的最大价格。

35. 一项票面值 \$1000 附半年度息票的 6% 债券在发行后 5 年可按面值通知偿还。出售时假定将通知偿还，则有 7% 的收益率。此债券并未通知偿还而在第 10 年之末到期。债券发行人偿还金额为 $1000 + X$，使得购买者收益率仍有半年度转换 7% 不变，求 X 。

§7.8　分期偿还债券

36. 一项 \$10000 的分期偿还债券以在今后 5 年内每半年支付本金 \$1000 的分期付款来偿还。对未偿还余额按年利率 12% 每半年支付一次利息。如要此债券产生半年度转换 8% 的收益率，问投资者应付多少？

37. 一项 \$10000 的分期偿还债券，从发行日起第 6 年之末至第 25 年之末每年支付本金 \$500 来偿还。对未偿还余额按利率 6% 来每年支付利息。若投资者有 10% 的实质收益率，问购买此债券的价格为多少？

38. 有一项金额为 \$100000 的分期偿还债券，若其收益率为息票率的 125%, 此债券按照下表以面值偿还

年末	偿还金额
5, 8, 11	\$10000
14, 17	20000
20	30000

所有利率为半年度，求此项债券现时值的表达式，需将答案表示为对各个 n 的 $a_{\overline{n}|}$ 的函数。

39. 一项金额为 \$78000 的分期偿还债券，对未偿还余额附有 4% 的年度息票，从第 5 年之末开始以 12 次年度分期付款来偿还。第 5 年之末偿还金额为 \$12000, 第 6 年之末为 \$11000, 如此继续下去，直到全部偿还完毕。求使投资者有 5% 实质收益率的价格表达式。

§7.9 某些推广

40. 推导 (7.29) 式的下列变形：

a) $P = C + \left[\frac{Fr}{s_{\overline{k}|}} - Ci\right] a_{\overline{n}|}$ 。

b) $P = \frac{G}{s_{\overline{k}|}} + \left[C - \frac{G}{s_{\overline{k}|}}\right] v^n$ 。

c) $P = K + \frac{g}{is_{\overline{k}|}}(C - K)$ 。

41. 推导 (7.30) 式的下列变形：

a) $P = C + (Fr - Ci^{(m)})a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 。

b) $P = Gs_{\overline{1}|}^{(m)} + (C - Gs_{\overline{1}|}^{(m)})v^n$ 。

c) $P = K + \frac{g}{i^{(m)}}(C - K)$ 。

42. 一项票面值 \$1000 的 10 年期债券，按面值到期偿还，并有每年 8% 的息票 (季度支付) 。购买时产生每年 6% 的半年度转换收益率。求购买价格。

43. 有一项 \$100 的债券，在 n 年到期后偿还 \$105, 并有 \$4

的半年度息票，购买后产生实质收益率 i, 其价格可表示为

$$\frac{Av^n + B}{i^{(2)}}.$$

求 A 和 B 。

44. 有一项票面值 \$1000 的 20 年期债券，它按面值到期偿还，头 10 年有 5% 的年度息票，后 10 年有 4% 的年度息票。试确定购买此项债券后产生季度转换收益率的债券价格表达式。

45. 一项 10 年期债券的年度息票按 $10, 9, 8, \cdots, 1$ 变化，而它到期偿还 \$100 。假若购买此债券后产生实质收益率 i, 求以下表达式：

a) 第 5 次息票金额中支付利息的部分，

b) 第 5 次息票金额中用以分期偿还帐面值的部分。

46. 一位投资者购买了一项票面值 \$100 附半年度息票的 3% 债券，此债券中的 \$50 在 9 年内以 \$51 到期偿还，而另外 \$50 则在 10 年内以 \$50 到期偿还。试证明产生实质收益率 i 的购买价格为

$$3a^{(2)}_{\overline{10}|} + (101 + 51i - 1.5s^{(2)}_{\overline{1}|})v^{10}.$$

§7.10　其他证券

47. 若收益率为 5% 或更少，例 7.13 的答案将是什么？

48. 一项优先股在第 1 年之末付 \$10 的分红，以后每一次分红比前一次多 5% 。如果 $i = 12\%$, 问什么样的等额年度分红可与此等价？

49. 一项普通股在每年之末支付年度分红。每股利润在刚结束的那年为 \$6 。未来利润假定每年增加 8% 。所得中用于分红的百分比在今后 5 年将为 0%, 而在此后为 50% 。求此股票使投资者得到 15% 的实质收益率的理论价格。

50. 一项普通股的购买价为当前利润的 10 倍。在此后的 6 年中股票不支付分红，但利润增加 60% 。在第 6 年之末此股票以 15 倍于利润的价格出售。求此项投资得到的年度实质收益率。

51. 求一项在每年底支付年度分红的普通股的理论价格表达式。在刚结束的 1 年中利润为 E 。假设利润在第 t 年的增长率为 K_t, 第 t 年的收益率为 i_t, 而在第 t 年企业打算用来支付分红的利润的百分比为 p_t, $0 \leq p_t \leq 1$ 。

§7.11　证券价值的确定

52. 5 年以前一项养老基金投资 \$1000000 于团体债券及 \$1000000 于优先股。对债券的投资是购买 1000 份 20 年后到期的债券，每份的票面值为 \$1000, 且附有 4% 的年度息票，对优先股的投资是购买 10000 股，每股票面值为 \$100, 附有 6% 的年度分红。债券现在以每份 \$900 出售，而优先股以每股 \$115 出售。假设在过去 5 年中投资组合没有变化，且所有投资收入一经赚得即从基金中抽出，试在以下各种假设下求此养老基金当前的资产值。

a) 所有资产按市场值定值。

b) 所有资产按帐面值定值。

c) 债券按帐面值定值，而股票按市场值定值。

d) 所有资产用现时值方法按 5% 的实质收益率定值。

杂题

53. 若 P 是 (7.1) 给出的债券价格，证明

a) $\frac{dP}{di} = -Cv[g(Ia)_{\overline{n}|} + nv^n]$ 。

b) $\frac{dP}{dg} = C \cdot a_{\overline{n}|}$ 。

54. 一项 \$1 的债券从发行之日起第 11 年之末至第 25 年之末有年度息票 g, 此债券在第 25 年之末到期以 \$1 偿还，购买此债券的实质收益率为 i 。求按修正 Makeham 形式的价格表示式

$$K' + \frac{g}{i}(C' - K').$$

确定 K' 和 C' 。

55. 一项 \$100 面值的 12 年期债券附有连续支付的年率为 9% 的息票。若购买此债券的收益率为 i, 相当于 δ, 试将此债券的

价格表示为 δ 的函数。

56. 一项票面值为 1 的债券按某固定收益率以 $1+p$ 出售。如果此债券的息票率减半，则价格为 $1+q$ 。若债券的息票率加倍，则价格可表示为 $1+Ap+Bq$ 。求 A 和 B 。

57. 一家企业发行一种债券附有 6% 的年度息票，在 5 年内到期偿还，它按产生 4% 的实质收益率来开价。假设将此债券用另一项附年度息票的 5% 债券来代替。问新债券期限应多长才能使债券持有人仍能有 4% 的实质收益率？算到年为止。

58. 有一项 \$1000 的 20 年期债券，附有年度息票按面值偿还，此债券第 20 年所支付的利息等于同一年本金调整金额的 70% 。若 $r=i+0.03$, 其中 r 为息票率，而 i 为收益率，求此债券的原始价格。

59. a) 求证 $P+i\sum_{t=0}^{n-1}B_t=n\cdot Fr+C$ 。

b) 给出 a) 中得到结果的字面解释。

第八章　实际应用

§8.1　引　言

第八章包含了利息理论在几个方面的实际应用，这些应用在前几章中均未涉及。8.2 节到 8.4 节所涉及的领域是消费信贷，其中包括对所谓“借贷忠诚”的讨论。

8.5 节和 8.6 节处理以前未讨论过的对固定资产投资的金融分析。8.5 节向读者介绍几种常用的折旧方法。8.6 节讨论一种称为核定资本值的金融分析，这是一个与 5.8 节中讨论的资金预算有关连的概念。

8.7 节分析卖空的收益率计算，这是一种以前未考虑过的金融业务。这项计算会出现一些不常见的困难。

最后，8.8 节给出了对当今存在的各种各样现代金融手段的综述。这部分材料是很有价值的，它会介绍给读者一些不熟悉的投资工具。这也为第九章和第十章中的进一步分析打下了基础。

§8.2　借贷忠诚

1968 年美国国会通过了“消费信贷保护法”。这项法律的第一章就是众所周知的“借贷忠诚法”(15USC1601)

这一法律的基本目的是要贷款人向借款人公正而准确地公开消费贷款的各项条款。此法律并不试图控制贷款人对贷款开价的金额，它只是要求适当的公开。此法律也只用于消费贷款，而不用于商业贷款。

此项法律要求公开两个关键的金融数值，即所谓*资金筹措费*与*年百分率*(常称为“APR”)。前者是表示贷款期间所索要的利

息金额 (元), 后者则是应付利息的年率。除了这两个金融数值之外，还需要用叙述形式公开一些其他内容。

一旦贷款开始，借款人可能要承担某些与获得贷款相联系的费用。例如百分点 (在 8.3 节中将会定义), 其他贷款费，服务费，信贷报告费，及信贷溢价保险。

借贷忠诚法中规定的资金筹措费包括所有应付的利息。不仅如此，它还包括上面这段中所提到的某些 (不一定是全部) 费用。详细条例是由负责实施借贷忠诚法的联邦储备局制定的，其中规定了哪些费用应包括在资金筹措费中，哪些则不必。

年百分率的计算规定要用 *精算方法* 。此方法的基础是同复利理论一致的。使用精算方法要将付款划分为本金和利息，这同 6.3 节中讨论的分期偿还表是一致的。

关于年百分率有趣的一点是：它是按照与付款相同频率转换的名义利率来给出的，而不是实质利率。例如，两项贷款可能都开价 "$APR = 12\%$", 但如果一项是按月度分期付款来偿还，而另一项是按季度分期付款来偿还，则这两个利率不是等价的。所以对不同贷款的年百分率不能有效地进行直接比较，除非它们的转换频率相同。在此法律中付款区段的长度称为 *单位时期* 。

借贷忠诚的要求使得不限期信贷和限期信贷产生区别。循环收费帐户或信用卡是 *不限期信贷* 的例子。对于不限期信贷，资金筹措费只需要按计算的一个时期公开。年百分率只是对未偿还贷款余额收取的名义年利率。例如，一家信用卡公司对未偿还余额按每月 1.75% 收利息，则必须开价为 "$APR = 21\%$" 。

限期信贷的一个例子是用分期付款偿还的典型贷款。为了展示借贷忠诚应用于标准的贷款交易，我们给出下述定义：

L = 支付预付款以后的原始贷款余额

K = 资金筹措费

R = 分期付款

m = 每年支付次数

$n =$ 贷款期间支付的总次数

$i =$ 年百分率

$j =$ 每个付款时期的利率

请读者注意，符号 K 在第七章中曾被用来表示债券偿还值的现时值。

分期付款由下式给出

$$R = \frac{L+K}{n}. \tag{8.1}$$

因为分期付款的现时值必须等于贷款的原始金额，故有求值方程

$$Ra_{\overline{n}|j} = L, \tag{8.2}$$

它对 j 求解。于是年百分率为

$$i = mj. \tag{8.3}$$

更复杂的贷款可能包含贷款人向借款人的多重付款，称为在各时刻的 预付 。而借款人的分期付款也可能不是等额的或按同样频率支付。象这些情形可以用 (5.3) 式来处理

$$P(j) = \sum_{t=0}^{n} v^t R_t = 0, \tag{5.3}$$

其中 $v = (1+j)^{-1}$ 。在应用公式 (5.3) 时必须记住，所有由贷款人作出的预付应有同一符号，而所有由借款人作出的付款则有相反的符号。

对于这些较复杂的贷款， 5.3 节中的结果曾经表明，如果未偿还贷款余额在贷款期限中某时刻改变符号，则收益率可能不唯一。借贷忠诚程序承认这个问题，但不能适当地处理。幸而，损失并不太大，因为对消费贷款来说，这样的情况是十分少见的。

借贷忠诚认为，非唯一收益率是由多重预付的存在所引起的。它用来解决此问题的方法是用一次预付取代多重预付。这一次预

付是用 2.6 节中定义的等时间方法来计算的。然而，正如我们在 2.6 节中曾经说过的，采用等时间方法会在答案中引入偏差。不仅如此，甚至在只有一次预付时仍可能存在多重收益率，这是一种借贷忠诚不承认的可能性。

对于限期信贷向借款人公开的年百分率，是假设了贷款将按其一开始给出的时间表来偿还。然而，许多借款人往往比计划偿还得更快，他们的办法是通过一次集中付款还清未偿还贷款余额，或者是为未偿还贷款余额重新筹集资金。重新筹集贷款自然就等于实施一项新的贷款。

当一笔贷款被提早偿还，则原来资金筹措费的一部分，经常称为*未获资金筹措费*，就归借款人所有了。这里“未获”一词反映这样的事实：贷款人并未“获得”从偿还日起到原定贷款期限结束为止这段时间的利息。在 8.4 节中将讨论正规计算未获资金筹措费的方法。在某些情形下，此项计算与原始年百分率计算所依据的基础并不完全一致。在此情形下，借款人实际承担的利率与贷款开始时开价的年百分率将会不同。

有些贷款在提前偿还贷款时有各种类型的罚金。借贷忠诚法规定这些条款必须用叙述形式公开。但它们不影响年百分率。在这种情形下分期借款人所得明显地小于未获资金筹措费。在极端情形下，借款人根本得不到什么，即贷款人将保留全部资金筹措费。由此，一位提早付清贷款并被处罚金的借款人实际上将承担超过开价年百分率的利率。

在 1969 年，联邦储备局出版了“年百分率表”第 I 卷和第 II 卷。这两卷包括了大量的表格，它们可直接应用于实际上所有由分期付款偿还的单金额贷款。它们也包括了各种平均和插值方法，可用于其他特殊的或非正规的业务。同时，它们还包括异常情况下单位时期的定义及计算程序中精确度的水平。

这些表可用于履行借贷忠诚法的需要。然而，随着 1969 年以来计算机应用水平的提高，如今一般的团体贷款人都会正规地

运用那些特别设计的计算机软件，以此常规地形成为履行借贷忠诚法所需要的那些公开条款。

以上简单讨论的目的是要读者对“借贷忠诚法”及其在正规条件下的应用有一个一般的了解。然而，讨论是很不完全的。读者如要了解关于借贷忠诚的更多详情可参阅联邦储备局出版的“借贷忠诚 Z 条例”(12 CFR 226)。还出版了一本“借贷忠诚 Z 条例官方解释”以对该条例作详细说明。

看看贷款利率计算的历史会很有启发。直到十九世纪初为止，最常用的方法是所谓 *贸易商规则*，它实质上相当于单利。贸易商规则用于短期贷款令人满意，但对长期贷款则会得出不合理的结果。

在 1795 年争论闹上了弗吉尼亚州法庭。作为里程碑的 Ross v. Pleasants 案件包含了一项惊人的结果。当贸易商规则用到一个延长的时期中时负债人和贷款人的角色竟然出现了互换。不用说，变成了负债人的那位贷款人对发生这种事是不会太高兴的！

这项争论最后于 1839 年由美国最高法院 Story v. Livingston 的判决而解决。法院决定借款人的付款应当首先用来支付任何应计及的利息，超过的部分再用来抵消未偿还贷款余额。这一决定同 6.3 节中建立的分期偿还表和复利理论是一致的。作为表彰最高法院的这次判决，上述将分期付款分割为利息和本金两部分的做法通常称为 *合众国规则*，这是一个与贸易商规则相对立的术语。

下面一段是 Justice Wayne 先生所写的 Story v. Livingston 判决的摘要：

“一般的正确规则是贷款人对每一次付款应先计算利息。此项付款应首先用于支付利息；如果付款金额超过了应付的利息，则其余额将用来抵消本金。如果付款金额不够付利息，则利息余额并不加到本金上去以产生利息。因此，不论债务是清楚地抽取利息，或是利息以费用的名义支付，都可同样地应用这项规则。”

对此判决有两个方面值得评论。首先，合众国规则在分期付

款时会产生利息的复合。如果分期付款以正规的频率支付，则利息将以与付款同样的正规频率来转换。然而，如果分期付款以非正规的频率支付，则合众国规则产生一个较为奇特的结果，即标出的利率会以与付款的非正规频率相同的频率转换。此结果可见例 8.3 。

其次，人们经常说合众国规则与精算方法是等价的。在大多数情况下，它们确是等价的。然而，当付款金额不够支付利息时，合众国规则与精算方法是不一致的。在合众国规则下，任何这种缺额并不加到未偿还贷款余额上去以产生利息。但对精算方法 (与复利理论一致)，这种缺额必须本金化，即加到未偿还贷款余额上去以产生附加的利息。

例 8.1　一项 $1000 的消费贷款在 1 年内以每月之末付款 $90 来偿还。求年百分率 (APR) 。

资金筹措费为

$$K = (12)(90) - 1000 = 80.$$

由应用公式 (8.2) 可确定月率 j

$$90a_{\overline{12}|j} = 1000$$

或

$$a_{\overline{12}|j} = 11.1111.$$

在 Z 条例下公布的联邦储备局表给出本例的答案为 $12j = 14.50\%$，此表的答案仅仅精确到 .25% 为止，这是借贷忠诚所要求的精确度的最小值。

如果用 3.8 节讨论过的确定未知利率的迭代法可以得到更精确的答案。此种迭代产生 $j = 0.012043$，故 $APR = 12j = 0.1445$ 或 14.45% 。

在借贷忠诚法通过以前，这种类型的贷款安排常称为“附加 8%”，因为 1 年的资金筹措费为贷款金额的 8% 。这种使人误解

的叙述意味着其利率比 APR 所给定的真实利率要低得多。正是这种广泛传播的曲解引出了借贷忠诚法的制定。

例 8.2　一位新汽车的购买者要为购车筹措 \$10000 的资金，一位商人提供了两种选择以在 4 年内通过月度付款来筹措这笔贷款。选择 A 的 APR 是 9%, 选择 B 提供一笔 \$600 的 "现金返回", 而 APR 是 12%, 假设此 "现金返回" 用于减少贷款金额，问哪一种选择对购买者更有吸引力？

选择 A 的每月付款为

$$R^A = \frac{10000}{a_{\overline{48}|0.0075}} = \frac{10000}{40.1848} = \$248.85.$$

选择 B 的每月付款为

$$R^B = \frac{9400}{a_{\overline{48}|0.01}} = \frac{9400}{37.9740} = \$247.54.$$

这样，购买者会接受选择 B, 因其每月付款略少。

然而，请注意这一分析假设了在选择 B 中购买者是将 "现金返回" 用于减少贷款金额，这相当于将 \$600 按月度转换 12% 的利率投资。如果购买者拿了 "现金返回", 而并不将它按差不多 12% 这样高的利率投资，那末选择 A 将是一种更好的选择。因为这两种选择的月度付款如此接近，故使得两种选择精确等价的 "不分胜负" 利率必然非常接近于 12% 。

例 8.3　一位借款人按 10% 利率借到一笔 \$1000 的贷款，为期 12 个月。如果借款人在第 3 个月之末偿还 \$200, 在第 8 个月之末偿还 \$300, 求第 12 个月之末应付的金额。 (1) 用真实的实质利率， (2) 用贸易商规则 (单利), (3) 用合众国规则。

1. 最后一次付款的求值方程为

$$1000(1.1) - 200(1.1)^{3/4} - 300(1.1)^{1/3} = \$575.50.$$

2. 最后一次付款的求值方程为

$$1000(1.1) - 200(1.075) - 300(1.03333) = \$575.00.$$

3. 在第 3 个月之末，应计利息为

$$1000(0.10)(1/4) = \$25.00.$$

这样， \$25.00 用于支付利息，而 \$175.00 则用于本金，将未偿还余额减少为 \$825.00 。在第 8 个月之末应付利息为

$$825.00(0.10)(5/12) = \$34.38.$$

这样， \$34.38 用于支付利息，而 \$265.62 用于本金，将未偿还余额减少为 \$559.38 。在第 12 个月之末，未偿还余额为

$$559.38[1 + (0.10)(1/3)] = \$578.03.$$

应当注意，合众国规则既不假设 10% 的实质利率，也不假设按任何正规频率转换的 10% 名义利率；而是假设在第 3 个月之末和第 8 个月之末转换的 10% 利率。从这个例子可以看到合众国规则的一个不平常的特性。

§8.3 不动产抵押

不动产抵押是一种特别重要的贷款类型，所借金额通常很大，对多数家庭是最大的单笔债务。不动产抵押的期限也很长，通常为 15 到 30 年。

对于非商业的不动产抵押需要应用借贷忠诚法，就象它应用于其他消费贷款那样。然而，不动产抵押也有某些特点值得加以讨论。由于其重要性，本节将专门致力于考虑这种贷款。

由于不动产抵押需付的总金额通常很大，故付款频率常为月度计付。付款日期通常是每个日历月的第一天。当抵押贷款的开

始日期不是一个日历月的第一天时，就应按贷款金额的单利从开始日到该日历月之末向借款人收取利息。天数一般按 2.3 节中所定义的实际 /365 计算。在分数时期内不付本金，而基于贷款总金额的正常分期偿还贷款将从下一个日历月的第一天开始。

不动产的所有权在法律上从出售者转给购买者的那一天称为**转帐日**。这一个时期一般也是贷款开始的日期。

对于不动产抵押在转帐日会收取若干种费用。最大的一笔一般是贷款开创费。这项费用常以百分点来开价，其中一个**百分点**是原始贷款金额的 1%。这样，对一笔 \$100000 的抵押贷款，当开价两个百分点时，购买者就必须支付 \$2000 以得到这笔贷款。通常还有各种其他费用，它们的名目有信用报告，估价，测量，文件准备，契据检查，记录费，印花税，等等。

按照借贷忠诚法，上述费用中有些必须反映在年百分率的计算中，另一些则不必。这样，按借贷忠诚法开价的年百分率将高于所称的贷款利率。后一利率是用来决定月度付款和构造分期偿还表。然而，年百分率一般并不反映在转帐时向借款人收取的全部费用。

下列程序是用来按借贷忠诚法对不动产抵押计算资金筹措费和年百分率。按 8.2 节定义 L, K, R, n, i 和 j，并置 $m = 12$。再给出以下附加定义：

Q = 必须反映在 APR 中的转帐费用

L^* = 按借贷忠诚目的计算的借贷金额，即反映了 Q 的金额

j' = 贷款月利率

i' = 贷款开价年利率

于是就有下列的关系。贷款开价年利率为

$$i' = 12j'. \tag{8.4}$$

对贷款的月度付款为

$$R = \frac{L}{a_{\overline{n}|j'}}. \tag{8.5}$$

按借贷忠诚目的计算的借贷金额为贷款金额减去必须反映的转帐费用，即

$$L^* = L - Q. \tag{8.6}$$

资金筹措费为付款总额与按借贷忠诚目的计算的借贷金额之差，即

$$K = nR - L^*. \tag{8.7}$$

为了得到按借贷忠诚计算的月利率，可解下列关于 j 的方程

$$Ra_{\overline{n}|j} = L^*. \tag{8.8}$$

最后，借贷忠诚的年百分率为

$$i = 12j. \tag{8.9}$$

第六章中考虑的贷款分期偿还表包含了相对短期的贷款。读者会发现看一下附录Ⅳ中对一项不动产抵押的 30 年分期偿还表是很有启发的。早期的一些付款几乎全是利息，而末期的一些付款则几乎全是本金。许多人发现买房子没有好处，付了几年的钱，然后发现不动产抵押的未偿还贷款余额减少得非常少。

近年来出现了一种新的抵押贷款，称为*调整率抵押*。这一术语同传统的抵押相对立，后者常称为*固定率抵押*。对于调整率抵押，贷款收取的利率可以由贷款人在某些条件下和受到某些约束进行周期性的向上或向下调整。

推动这种调整率抵押发展起来的动力是某些贷款人愿意提供这种与传统固定率抵押相比初始利率较低的抵押。贷款人的这种反应是可以理解的，因为在固定率抵押中贷款人必须在 15 至 30 年的长时期内对收取的利率承担确定的义务。这样，在利率上升

时期，贷款人被锁定在固定的利率上；这就造成其收益率低于市场通行利率。而另一方面，在利率下降时期，借款人却可以用较低的利率另外筹集贷款。

从借款人的角度看，调整率抵押可能是有吸引力的，因为其初始利率和初始月度付款低于固定率抵押。不仅如此，如果利率下降，月度付款还可能调整到更低。

然而，调整率抵押有一个很大的风险，那就是利率和月度付款可能增加并超过固定率抵押原先选定的相应数值。这样，对于固定率抵押，利率波动的风险主要由贷款人承受；而对调整率抵押，则此风险大多转到借款人头上。

在调整率抵押中，贷款人可以调整利率的时段称为*调整期*。这一时段经常为每 1 年，每 3 年或每 5 年。

调整率抵押的利率常与一*标志率*以公式相联系。它防止贷款人在市场通行利率并没有怎样增长的时候随意地将利率调高。可能采用的标志率的一个例子是美国国库证券在指定到期日的收益率。第二个例子是基于支付给储户利率的标志率，以便保证由范围较广的机构贷款人借贷的基金。调整率抵押的利率一般是在标志率上再加上一个 margin (幅度) 来计算的。此幅度在原始的抵押契约上加以规定。

大多数调整率抵押对利率和 / 或付款的增加额度有一定的限制，称为*限额*。有一种限额是*利率限额*。这种限额安置一个极限值，以限制利率任一次周期性增加的额度，或者限制整个贷款期限内总增加的额度，或对两者均加以限制。第二种限额是*支付限额*。这种限额对任一次调整日期可能发生的月度支付金额的增加给出一个百分比的限制。

支付限额的一个有趣的方面是它并不必须对收取利率的增加额度提出一个可比较的极限值，因此，有可能修正的支付额不足以支付贷款的利息，这就造成了负分期偿还，即未偿还贷款余额的增加。负分期偿还在 6.6 节中曾讨论过。不用说，调整率抵押

对借款人的吸引力在负分期偿还发生时很快消失了。

可以预料，借贷忠诚法对调整率抵押有特殊的要求。要求有效的叙述公开，包括由联邦储备局和联邦家庭贷款银行董事会出版的一个文件，名为“调整率抵押的消费者手册”。然而，年百分率的确定是基于原始的贷款利率，这样，调整率抵押的年百分率并不在数值上传递未来的利率变化。

近年来还出现了一些其他类型的不动产抵押。下面对其中的一部分作简单介绍。然而，只是作简单叙述，列举也不完全。对现存各种不动产抵押的信息可从任何主要的不动产商行或抵押公司得到。

1. *渐进付款抵押*　这是一种固定率或调整率抵押，其付款在某一个时期(例如 5 年)内是增加的，然后变成等额。这种抵押是专为一些年轻的刚找到职业不久的房主设计的，他们预计在今后几年内收入将很快增长。对这种抵押出现负分期偿还是很普通的。

2. *共享增值抵押*　这是一种固定率抵押，其利率比常规的固定率抵押要低。作为对低利率的交换，借款人同意与贷款人分享基本财产的增值。

3. *“转移”抵押*　这是一种固定率抵押，它需要存在一个对基本财产的 *可继承的* 抵押。所谓“可继承”的抵押是指它可以由原拥有人转给新拥有人。假如原抵押的利率比当前利率为低，则原抵押与新“转移”抵押的组合可使新拥有人得到一个比完全新抵押为低的总价格。然而，“转移”抵押用处有限，因为许多抵押是不可继承的。

4. *逆向年金抵押*　这是一种固定率或调整率抵押，在其中房屋拥有人从 *抵押资产净值* 中接受一项年金。这里“抵押资产净值”是资产的价值与抵押中未偿还贷款余额的差。这种类型的抵押是专为老年的房屋拥有者设计的，他们的房子有很大的净值，但需要收入作为退休之用。当然，在这样的安排下，未偿还贷款

余额的增长对许多退休者来说是不吸引人的。

例 8.4　一个家庭购买了一幢 \$150000 的房子。他们同意预付 20%，而用一项 30 年期，利率 9.9% 的固定率抵押来偿付余额。为了保证此项贷款，他们必须在转帐时付 2 个百分点。此外，在转帐时还有 \$800 的其他费用。在转帐时的所有总费用中，$1\frac{1}{2}$ 点和其他费用的一半必须反映在 APR 中。此房子是在 7 月 12 日购买的。试按本节所述进行转帐时所需的各项计算。

预付金额为 $.2(150000) = \$30000$ 。故初始贷款金额为

$$L = 150000 - 30000 = \$120000.$$

然后计算 7 月份余下日子的利息。每天收取的利息为

$$\frac{0.099(120000)}{365} = \$32.5479.$$

从 7 月 12 日到 7 月 31 日为止共有 20 天，故利息金额为

$$20(32.5479) = \$650.96.$$

这一金额必须在 7 月 12 日转帐那天支付，尽管按照利息理论应该是在 7 月之末支付的。当然，必须在转帐日支付对贷款人有利。

我们有 $i' = 0.099$, 故 $j' = 0.099/12 = 0.00825$, 这样，贷款的月度付款为

$$R = \frac{120000}{a_{\overline{360}|0.00825}} = \$1044.23.$$

第一次正规付款是在 9 月 1 日支付 (不是 8 月 1 日)。

转帐费用为 2 个百分点加上 \$800, 即 $.02(120000) + 800 = \$3200$ 。在此笔费用中 $1\frac{1}{2}$ 个百分点加上 \$400 必须反映在 APR 中，即

$$Q = 0.015(120000) + 400 = \$2200$$

这样，按借贷忠诚目的计算的借贷金额为

$$L^* = 120000 - 2200 = \$117800.$$

资金筹措费等于总付款减去借贷金额，即

$$\begin{aligned} K &= (360)(1044.23) - 117800 \\ &= 375992.80 - 117800 = \$258122.80. \end{aligned}$$

注意 30 年的总付款超过了贷款金额的三倍！长时期复利的效应确是惊人的。

最后，需计算 APR 。由 (8.8) 式得

$$1044.23a_{\overline{360}|j} = 117800.$$

利用 3.8 节叙述的迭代法，可得 $j = 0.008433$ 。这样， APR 为

$$\text{APR} = \text{i} = 12(0.008433) = 0.1012, \text{ 或} 10.12\%.$$

APR 大于 9.9%, 这正如所预料的。

例 8.5　一位借款人取得一项 \$65000 的 30 年期调整率抵押。第一年利率为 8% 。假定利率在第二年增加到 10%, 试确定月度付款的增加。

第一年的月度付款为

$$\frac{65000}{a_{\overline{360}|0.08/12}} = \frac{65000}{136.2835} = \$476.95.$$

一年后的未偿还贷款余额为

$$476.95a_{\overline{348}|0.08/12} = 476.95(135.1450) = \$64457.42.$$

第二年的修正月度付款为

$$\frac{64457.42}{a_{\overline{348}|0.10/12}} = \frac{64457.42}{113.3174} = \$568.82.$$

这样，月度付款的增长为

$$568.82-476.95=\$91.87,$$

它是增长 19.3% 。

§8.4 近似方法

计算精确的年百分率是较为复杂的一件事，因为其中包含有迭代。现已发展了几种对分期偿还贷款计算未知利率的近似方法。这些方法不用到任何利息函数，并可直接计算。

由于带有现成金融函数的袖珍计算器的发展，这些方法现已不象以前那样重要。虽然如此，它们仍然具有相当大的教育和概念上的价值。除此之外，它们在为计算 8.2 节中定义的未获资金筹措费和 8.5 节中将考虑的各种折旧方法提供需要的背景方面是有用的。最后，这些方法中的一个有这样高的精确度，以致它在其他场合也有价值。

我们将考虑四种近似方法。所有这四个方法在有一个方面是彼此相似的：即它们都将分期付款中本金与利息的真实划分用一个任意的划分去代替。假设在一年中的每 $1/m$，投资的本金金额为按对这年的那个 $1/m$ 利率为 i/m 去投资的。这样，如记在时刻 t/m 的未偿还投资余额为 $B_{t/m}$，则有

$$\frac{i}{m}\sum_{t=0}^{n-1}B_{t/m}=K$$

或

$$i=\frac{mK}{\sum\limits_{t=0}^{n-1}B_{t/m}}. \tag{8.10}$$

(8.10) 式的导出反映了这样的事实，即资金筹措费 K 必须等于在一年中的每个 $1/m$ 在未偿还贷款余额上得到的利息之和。各

种方式的不同仅仅是分期付款在本金与利息之间的任意划分上，这将反映在 (8.10) 式的分母中。

第一种方法常称为*最大收益方法*，因为它产生比任何其他方法为大的答案。由此方法产生的 i 记为 $i^{\max}$ 。这一方法假设所有分期付款完全用在本金上，直到它完全付足为止，然后再完全用于利息。我们也假设资金筹措费小于一次分期付款，即

$$K \leq \frac{L+K}{n}.$$

这后一个假设导致这样的结果，即所有分期付款除开最后一次的部分以外都用于偿还本金。

在这些假定下，表 8.1 是一个这种方法的修正分期偿还表。请读者校核表 8.1 中的各项，并注意表中的各种关系。

我们现在需要将未偿还贷款余额这一列求和以计算 (8.10) 式

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = Ln - \frac{L+K}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2},$$

故

$$\begin{aligned} i^{\max} &= \frac{mK}{Ln-(L+K)\frac{n-1}{2}} \\ &= \frac{2mK}{L(n+1)-K(n-1)} \end{aligned} \tag{8.11}$$

表 8.1　用最大收益方法的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	$L-\frac{L+k}{n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	$L-2\frac{L+k}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	$L-(n-1)\frac{L+k}{n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	K	$\frac{L+K}{n}-K$	0
总数	$L+K$	K	L	

有一点很有趣，公式 (8.11) 也可从另一角度导出，只要假设在整个贷款期间使用单利。这一推导留作习题。对资金筹措费大于一次分期付款的情形，更一般公式的推导也留作习题。

第二种方法常称为*最小收益方法*，因为它产生比其他任何方法都小的答案。由此方法产行的 i 值记为 $i^{\min}$ 。这一方法假定所有分期付款完全用于利息直到它完全付足为止，然后完全用于本金。我们仍假设资金筹措费小于一次分期付款，这样第一次付款至少够付整个利息金额。表 8.2 是这种方法的修正分期偿还表。请读者校核表 8.2 中的各项，并注意表中的各种关系。

我们现在对未偿还贷款余额列求和以计算 (8.10) 式

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = \frac{L+K}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - K.$$

故

$$\begin{aligned} i^{\min} &= \frac{mK}{(L+K)\frac{n+1}{2} - K} \\ &= \frac{2mK}{L(n+1) + K(n-1)}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

对资金筹措费大于一次分期付款的情形可导出更一般的公式，这可留作习题。

表 8.2　用最小收益方法的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				$(n)\frac{L+K}{n} - K = L$
$\frac{1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	K	$\frac{L+K}{n} - K$	$(n-1)\frac{L+K}{n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	$(n-2)\frac{L+K}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	$\frac{L+K}{n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	0	$\frac{L+K}{n}$	0
总数	$L+K$	K	L	

最大和最小收益方法受到了合理的批评，因为它们并不反映每次分期付款一部分是本金，另一部分是利息这一事实。另外两种方法则是反映了这一事实。

第三种，也是最简单的方法称为常数比例方法。由此方法产生的 i 值记为 i^{cr} 。这一方法假定每次分期付款中有一常数百分比为本金，而另一常数百分比为利息。表 8.3 是这种方法的修正分期偿还表。请读者校核表 8.3 中的各项，并注意表中的各种关系。

现在要对未偿还贷款余额列求和以计算 (8.10) 式

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = L \cdot \frac{n(n+1)}{2n}.$$

故

$$\begin{aligned} i^{cr} &= \frac{mK}{L \cdot \frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{2mK}{L(n+1)}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

表 8.3　用常数比例方法的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				$\frac{n}{n}L = L$
$\frac{1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$\frac{n-1}{n}L$
$\frac{2}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$\frac{n-2}{n}L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$\frac{1}{n}L$
$\frac{n}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	0
总数	$L+K$	K	L	

有趣的是，公式 (8.13) 也可从另一角度导出。每年的利息金额是 mK/n 。平均未偿还贷款余额可以由将第一个时期和最后

一个时期的未偿还贷款余额加以平均而得到，即

$$\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2}\cdot L\frac{1}{n}=L\cdot\frac{n+1}{2n}.$$

利率则由年度利息金额除以平均未偿还贷款余额来计算，即

$$\begin{aligned} i^{cr} &= \frac{m\cdot\frac{K}{n}}{L\cdot\frac{n+1}{2n}} \\ &= \frac{2mK}{L(n+1)}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

这两个方法是等价的，因为在这些假设下，未偿还贷款余额是线性的。

偶而还会碰到常数比例方法的更简单形式，那就是平均未偿还贷款余额取为贷款开始时余额和结束时余额的平均，即

$$\frac{1}{2}\cdot L+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot L.$$

在此假设下，利率为

$$i^{cr'}=\frac{2mK}{Ln}. \tag{8.14}$$

公式 (8.14) 用 1/2 代替了 $(n+1)/2n$ 这一项。请读者注意，(8.13) 和 (8.14) 间的关系类似于 (7.24) 与 (7.25)，即债券推销员公式的两个版本之间的关系。一般说来， (8.14) 式的精度低于 (8.13) 式。

很有趣的一件事是 i^{cr} 等于 i^{max} 和 i^{min} 的调和平均。此事的证明留作习题。

第四种方法是正比例方法。由此方法产生的 i 值记为 i^{dr} 。这种方法在本金与利息间作一种近似划分，此划分是最靠近于由精算方法所得的精确划分的。在真实的分期偿还表中支付利息列随时间而下降，而偿还本金列则随时间上升。正比例方法就反映

了这种形式，而其他近似方法均非如此。一般说来，正比例方法比其他几种近似方法更为准确。

最好用例子来看正比例方法。考虑一项用 12 次月度分期付款来偿还的一年期贷款。从 1 到 12 的正整数之和为 78 。正比例方法假定，第一个月所付利息为资金筹措费的 12/78, 第二个月为 11/78, $\cdots$, 最后一个月为 1/78 。这种支付利息的递减形式将产生偿还本金的对应的递增形式。这种正比例方法常被称为 78 规则，尽管 78 这个数其实仅对期限为 12 个月才有效。

表 8.4 是此方法的修正分期偿还表。我们定义 S_r 为头 r 个正整数之和，即，

$$S_r = 1 + 2 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2}. \tag{8.15}$$

请读者校核表 8.4 中的各项，并注意表中的各种关系。

表 8.4　用正比例方法的分期偿还表

时期	付款金额	支付利息	偿还本金	未偿还贷款余额
0				$(n)\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{S_n}{S_n} = L$
$\frac{1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$K \cdot \frac{n}{S_n}$	$\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{n}{S_n}$	$(n-1)\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{S_{n-1}}{S_n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$K \cdot \frac{n-1}{S_n}$	$\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{n-1}{S_n}$	$(n-2)\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{S_{n-2}}{S_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$K \cdot \frac{2}{S_n}$	$\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{2}{S_n}$	$\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{S_1}{S_n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{L+K}{n}$	$K \cdot \frac{1}{S_n}$	$\frac{L+K}{n} - K \cdot \frac{1}{S_n}$	0
总数	$L+K$	K	L	

我们现在以求未偿还贷款余额列之和来计算 (8.10) 式。在此之前先需求 S_r 对 r 从 1 到 n 之和，即有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} S_r &= \sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(r^2+r) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

利用此结果可得

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = \frac{L+K}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - K\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

故有

$$\begin{aligned} i^{dr} &= \frac{mK}{(L+K)\frac{n+1}{2} - K\frac{n+2}{3}} \\ &= \frac{mK}{\frac{1}{6}[3(L+K)(n+1) - 2K(n+2)]} \\ &= \frac{mK}{\frac{1}{6}[3L(n+1) + K(n-1)]} \\ &= \frac{2mK}{L(n+1) + \frac{1}{3}K(n-1)}. \end{aligned} \tag{8.16}$$

公式 (8.16) 产生极准确的解答。表 8.5 给出了一些情况下结果的比较。

表 8.5　精确 APR 与用 (8.16) 式近似值的比较

频率	期限	资金筹措费	用公式 (8.16), 近似 i	APR, 精确 i
月度	6 个月	2%	6.82%	6.82%
”	”	4	13.58	13.58
”	”	6	20.28	20.29
”	1 年	4	7.30	7.31
”	”	8	14.44	14.45
”	”	12	21.43	21.45
”	2 年	8	7.50	7.50
”	”	16	14.64	14.67
”	”	24	21.46	21.58
”	5 年	20	7.39	7.42
”	”	40	13.94	14.12
”	”	60	19.78	20.32
季度	1 年	8	12.60	12.60
”	2 年	16	13.66	13.69
”	5 年	40	13.60	13.77

没有哪种情况会使这两种方法的计算结果差到 1% 的，只有对高利率的长期贷款才会相差到大于 .1%, 而借贷忠诚法所要求的计算年百分率的允许误差是 .25%, 公式 (8.16) 对于表 8.5 中的所有例子都达到这样的精度，只有最高资金筹措费的 5 年期贷款例外。

(8.16) 式对于求年金未知利率的迭代提供很好的初始值。在 3.8 节中曾为此种迭代导出 (3.29) 式作为初值

$$i \doteq \frac{2(n-k)}{k(n+1)}. \tag{3.29}$$

(3.29) 和 (8.13) 式是等价的，此结果的证明留作习题。

(8.16) 式产生下列类似的初始值公式 (用第三章的符号)

$$i \doteq \frac{2(n-k)}{k(n+1)+\frac{1}{3}(n-k)(n-1)}. \tag{8.17}$$

公式 (8.17) 的导出留作习题。一般说来， (8.17) 式的结果优于 (3.29) 式的结果。

在 8.2 节中曾讨论过提早付清的贷款未获资金筹措费的计算。有两种方法是广泛使用的。第一种基于精确地应用精算方法。第二种则基于 78 规则。例 8.8 中会看到贷款人喜欢用 78 规则。读者应小心不要把 78 规则的这种应用和 (8.16) 的推导混淆起来。两种情况是完全不同的。

例 8.6　求例 8.1 中分期付款贷款的利率。 (1) 用最大收益方法， (2) 用最小收益方法， (3) 用常数比例方法，及 (4) 用正比例方法 (78 规则) 。

1. 用 (8.11) 式

$$i^{\max} = \frac{(2)(12)(80)}{(1000)(13)-(80)(11)} = 0.1584 \text{ 或} 15.84\%.$$

2. 用 (8.12) 式

$$i^{\min} = \frac{(2)(12)(80)}{(1000)(13)+(80)(11)} = 0.1383 \text{ 或} 13.83\%.$$

3. 用 (8.13) 式

$$i^{cr} = \frac{(2)(12)(80)}{(1000)(13)} = 0.1477 \text{ 或} 14.77\%.$$

4. 用 (8.16) 式

$$i^{dr} = \frac{(2)(12)(80)}{(1000)(13)+\frac{1}{3}(80)(11)} = 0.1444 \text{ 或} 14.44\%.$$

由例 8.1 知用精算方法得到的精确答案为 14.45% 。正比例方法产生的答案比其他任何近似方法都更靠近精算方法得到的答案。事实上，它已达到了很高的精度。

例 8.7　若 $a_{\overline{20}|i} = 8.5136$, 需从中解 i, 试比较用公式 (3.29), (3.32) 及 (8.17) 得到初始值的准确性。

预先可知道 $i = 10\%$, 用一个预先设计好的数可以更容易比较三种方法的有效性。

(3.29) 式给出

$$i_0 = \frac{2(n-k)}{k(n+1)} = \frac{2(20-8.5136)}{8.5136(21)} = 0.1285 \text{ 或} 12.85\%.$$

(3.32) 式给出

$$i_0 = \frac{1-\left[\frac{k}{n}\right]^2}{k} = \frac{1-\left[\frac{8.5136}{20}\right]^2}{8.5136} = 0.0962 \text{ 或} 9.62\%.$$

(8.17) 式给出

$$i_0 = \frac{2(n-k)}{k(n+1)+\frac{1}{3}(n-k)(n-1)}$$

$$= \frac{2(20-8.5136)}{8.5136(21)+\frac{1}{3}(20-8.5136)(19)}$$
$$= 0.0913 \text{ 或} 9.13\%.$$

这样，被高度吹捧的正比例方法 (78 规则) 公式 (8.17) 正如预期地那样打败了常数比例方法 (3.29)，但却负于无名的公式 (3.32) 。

然而，如果我们对例 8.1 和 8.6 中考虑的贷款应用公式 (3.32)，则得到

$$i = 12\frac{1-\left[\frac{11.1111}{12}\right]^2}{11.1111} = 0.1541 \text{ 或} 15.41\%.$$

这一结果明显地差于由正比例方法所产生的结果。这样，没有哪一个合适的公式在解年金的未知利率问题时永远产生最好的初值。

然而，经验表明，对于“较短的”时期，正比例方法通常提供最好的结果；而对于“较长的”时期，则 (3.32) 公式的效果最好。这一差异归因于这样的事实，即 (3.32) 公式更精确地反映了在较长时间段的复利。

例 8.8　对于例 8.1 中的消费贷款，如果贷款在 6 次正规分期付款以后一次还清，试计算由借款人收回的未获资金筹措费。(1) 用精算方法，(2) 用 78 规则。

1. 在第 6 个月之末的未偿还贷款余额应为

$$90a_{\overline{6}|0.12043} = \$517.95.$$

按照原始分期偿还表在最后 6 个月内原应付款为

$$6 \cdot 90 = \$540.00.$$

故未获资金筹措费为

$$540.00 - 517.95 = \$22.05.$$

2. 用 78 规则，有 $S_6=21$ 及 $S_{12}=78$。资金筹措费总额为 \$80。故未获资金筹措费为

$$\frac{21}{78}\cdot 80=\$21.54.$$

这样，与精算方法相比，78 规则产生一较小的未获资金筹措费。借款人提早付清贷款并基于 78 规则接受这笔款项显然不如按精算方法处理合算。借贷忠诚法并不禁止以这样形式使用 78 规则，两种方法都是广泛使用的。

§8.5 减值方法

利息理论的一个重要应用是*固定资产*的金融分析。这种资产的有用寿命多于一年。固定资产的例子有装置，设备，不动产，汽车等等。固定资产由个人或公司根据商业与投资的需要而购置。

给出下列定义：

$n=$ 所考虑期限内利息转换时期的个数

$A=$ 资产在 n 个时期开始时的值

$S=$ 资产在 n 个时期结束时的残值 (S 可以为零或负值)

$R=$ 扣除资产开支后的等额周期返回值

$i=$ 每个利息转换时期的投资收益率

$j=$ 每个利息转换时期的偿债基金利率

请读者注意符号 A 在 5.5 节中曾被用来表示初始基金余额。

如果 $A=S$, 即资产既不随时间增值也不随时间减值，则每个时期的收益率是周期净返回值除以资产值，即

$$i=\frac{R}{A}. \tag{8.18}$$

一般 $A\neq S$, 因为资产值常随时间而变化。若 $A<S$, 此资产称为*增值资产*；若 $A>S$, 此资产称为*减值资产*。前者的例子

可以是不动产，而后者的例子可以是工厂的机器。我们一般讨论减值资产，虽然所得的许多结论在两种情形都可以用。

若 $A \neq S$, 公式 (8.18) 将无效，因为它不认为资产值是变化的。在此情形下，需要在我们的分析中用偿债基金去代替资本，这样根据 6.4 节中的原理，基本求值方程为

$$R = Ai + \frac{A - S}{s_{\overline{n}|j}}. \qquad (8.19)$$

如果 $A = S$, (8.19) 式回复到 (8.18) 。在实践中，常假设 $i = j$, 特别是如果实际上没有建立偿债基金的话。(8.19) 式不一定要 $A > S$, 它对 $A < S$ 也有效。

请读者注意上述讨论与第七章中对债券的分析是相似的。用折扣购买的债券类似于增值资产，而用溢价购买的债券则类似于减值资产。事实上，(8.19) 式对债券也可用，注意 A 起着价格的作用，S 为偿还值，而 R 为息票。此事的证明留作习题。

减值资产的价值随时间的减少称为 *减值* 。这种减值很大程度上是由于东西的变坏和报废。正确的会计实践都规定资产的价值必须在投资者的帐目上随时写下来。任何时刻写在投资者帐目中的资产值称为在该时刻的 *帐面值* 。在每一时期中帐面值减少的金额称为在该时期的 *减值费* 。

在实践中，有几种计算帐面值和减值费的方法。除了会计上的考虑以外，选择减值方法的另一个重要因素是税法。减值费是可以作为所得税的事业费用而予以扣除的，直到遇到某种需要为止。在美国，为税务目的的减值费的规则在某些场合已有改变，这不属本节讨论范围。然而，的确需要分析各种广泛使用的方法。这里讲四种方法。

设 B_t 为资产在第 t 个时期末的帐面值，$0 \leq t \leq n$ 。显然 $B_0 = A$, 而 $B_n = S$ 。设 D_t 为第 t 个时期的减值费，$1 \leq t \leq n$ 。则有

$$D_t = B_{t-1} - B_t. \qquad (8.20)$$

第一种方法是 *偿债基金方法* 或 *复利方法* 。此方法与公式 (8.19) 一致。任何时刻的帐面值必须等于资产的原始值减去偿债基金的金额，即

$$B_t = A - \left[\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}\right] s_{\overline{t}|j}. \tag{8.21}$$

注意 (8.21) 产生合理的 B_0 和 B_n 的值。而减值费为

$$\begin{aligned} D_t &= B_{t-1} - B_t \\ &= \left[A - \left(\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}\right) s_{\overline{t-1}|j}\right] - \left[A - \left(\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}\right) s_{\overline{t}|j}\right] \\ &= \left[\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}\right] (s_{\overline{t}|j} - s_{\overline{t-1}|j}) \\ &= \left[\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}\right] (1+j)^{t-1}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

从 (8.22) 式显然可见，由偿债基金方法产生的减值费在整个资产的寿命期间是递增的。这可能是也可能不是减值费的合理形式，要看资产的性质而定。例如，对一幢办公大楼，它开始时慢慢地减值，随后则更快地减值，此时这种减值费的形式是合理的。但这种形式对一辆汽车可能就是不合理的。

但要强调，减值方法的选择常常不在于分析哪种方法产生更合理的资产帐面值。对许多个人和企业来说更重要的考虑是要用一种允许的方法使付税方面最为合算。某人或某公司如想在资产寿命的早期就得到高额的减税，那是不会去选择偿债基金方法的。

不要认为偿债基金法实际上需要用一项偿债基金。它只不过是计算帐面值和减值费的一种方法。实际上，可以积累一笔偿债基金以代替资本的损失，也可以不积累这样一笔基金。

第二种，也是最简单的方法，是 直线方法 。这一方法由于简单而在实践中被广泛使用。这种方法的减值费是常数，即

$$D_t = \frac{A-S}{n}. \tag{8.23}$$

从而帐面值是线性的

$$B_t = \left[1 - \frac{t}{n}\right] A + \frac{t}{n} S. \tag{8.24}$$

注意 (8.24) 产生合理的 B_0 和 B_n 的值。有趣的是，直线方法是偿债基金方法当 $j = 0$ 时的一种特殊情形。

第三种方法称为 下降结欠方法，常数百分比方法 或 复贴现方法 。这种方法产生的减值费是在整个资产寿命期间为下降的，这与偿债基金方法和直线方法都不同，在那两种方法中减值费分别为上升和等于常数。

下降结欠方法的特征是：减值费是该时期初帐面值的一个常数百分比，即

$$D_t = d \cdot B_{t-1}. \tag{8.25}$$

今 $D_t = B_{t-1} - B_t$, 故有

$$B_t = B_{t-1}(1-d).$$

又此事对所有 t 均成立，故有

$$\begin{array}{llll}
B_0 = & & & A \\
B_1 = & B_0(1-d) & = & A(1-d) \\
B_2 = & B_1(1-d) & = & A(1-d)^2 \\
B_3 = & B_2(1-d) & = & A(1-d)^3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
B_t = & B_{t-1}(1-d) & = & A(1-d)^t \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
B_n = & B_{n-1}(1-d) & = & A(1-d)^n = S
\end{array} \tag{8.26}$$

由于 A 与 S 均已给出，故可按下式求 d

$$\begin{aligned} A(1-d)^n &= S, \\ (1-d)^n &= \frac{S}{A}, \\ 1-d &= \left[\frac{S}{A}\right]^{\frac{1}{n}}, \\ d &= 1-\left[\frac{S}{A}\right]^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

“复贴现方法”这个名称从 (8.26) 式可以明显地看出其意义，其中 d 可以解释为贴现率。应该注意此方法假设 S 为正。如果 S 为零或负，这种方法不能应用。

下降结欠方法的一种通常的变形是基于一个与 (8.27) 式中定义的 d 不同的因子。该因子是基于直线方法中比率的倍数，例如 125%, 150% 或 200% 。通常该因子是在第一年作用于整个 A, 而忽略 S 。我们记此因子为 d', 它定义为

$$d' = \frac{k}{n}, \tag{8.28}$$

其中 k 为直线方法中所用的百分比，如 1.25, 1.5 或 2 。

因而下降结欠方法就用这个修正因子来做减值表。然而，资产值不会减值到 S 以下，所以减值表中最后一行的减值费是一个任意值，它要把帐面值精确地调整到 S 。下降结欠方法的这种变形见例 8.19 所示。

第四种方法是*年数和方法*。此种方法基于 78 规则，并且也产生在整个资产寿命期间为递减的减值费。这一方法的推理类似于 8.4 节中对计算分期偿还贷款收益率正比例方法的推理。

同以前一样，记 S_r 为头 r 个正整数的和

$$S_r = 1+2+\cdots+r = \frac{r(r+1)}{2}. \tag{8.15}$$

减值费序列如下:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{n}{S_n}(A-S) \\
D_2 &= \frac{n-1}{S_n}(A-S) \\
\vdots & \quad \vdots \\
D_t &= \frac{n-t+1}{S_n}(A-S) \\
D_n &= \frac{1}{S_n}(A-S)
\end{aligned} \tag{8.29}$$

减值费之和等于 $A-S$, 正该如此。帐面值则为

$$\begin{aligned}
B_t &= A-\sum_{r=1}^{t} D_r \\
&= S+\sum_{r=t+1}^{n} D_r, \text{ 因为} \sum_{r=1}^{n} D_r = A-S \\
&= S+\frac{S_{n-t}}{S_n}(A-S).
\end{aligned} \tag{8.30}$$

折耗是指自然资源供应的耗竭，如煤和油。在数学上它与减值是类似的，因为一座煤矿或油田是一项随煤和油被开采而减值的资产。故上述计算减值费的方法也可用来计算折耗费。

例 8.9　一台机器价值 \$10000, 可用 5 年，在 5 年之末有残值 \$1000 。试计算帐面值与减值费： (1) 用偿债基金方法，取 $j=0.05$, (2) 用直线方法， (3) 用下降结欠方法，及 (4) 用年数和方法。

1. 用公式 (8.21) 及 (8.22) 得

$$\frac{A-S}{s_{\overline{n}|}} = \frac{9000}{s_{\overline{5}|}} = 1628.775$$

及

t	D_t	B_t
0		10000
1	1629	8371
2	1710	6661
3	1796	4865
4	1886	2979
5	1979	1000

2. 用公式 (8.23) 及 (8.24) 得

t	D_t	B_t
0		10000
1	1800	8200
2	1800	6400
3	1800	4600
4	1800	2800
5	1800	1000

3. 用公式 (8.27) 得

$$d = 1 - (0.1)^{0.2} = 1 - 0.631 = 0.369.$$

由 (8.25) 式和 (8.26) 式有

t	D_t	B_t
0		10000
1	3690	6310
2	2328	3982
3	1470	2512
4	927	1585
5	585	1000

4. 用公式 (8.29) 与 (8.30) 得

t	D_t	B_t
0		10000
1	3000	7000
2	2400	4600
3	1800	2800
4	1200	1600
5	600	1000

例 8.10　用 200% 下降结欠方法重做例 8.9 。

由公式 (8.28), 我们有

$$d' = \frac{2}{5} = 0.4.$$

此事易由通常推理而得。在使用直线方法时 5 年内减值因子应当是每年 20% (忽略残值) 。 200% 下降结欠因子必须是此数的 2 倍，即 40% 。

由 (8.25) 式和 (8.26) 式，有

t	D_t	B_t
0		10000
1	4000	6000
2	2400	3600
3	1440	2160
4	864	1296
5	296	1000

为了确保 $B_5 = 1000$, 注意 $D_5 = 296$ 是任意取的。如果忽略 S, 则 D_5 应当是 $.4(1296) = 518.40$ 。

§8.6　核定成本

本节讨论另一种类型与固定资产有关的分析。在实践中有一件很重要的事是要比较供选择的可能的固定资产的成本。拥有一项固定资产需有三方面的成本：

1. 原始购买价的利息损失，因为这笔钱原本可投资在别处以产生利息。

2. 减值损耗。

3. 维修费。

一项资产的 *周期费* 定义为拥有此项资产每个时期的成本。如设 H 为周期费，M 为周期维修费，则基本求值方程为

$$H = Ai + \frac{A - S}{s_{\overline{n}|j}} + M. \tag{8.31}$$

(8.31) 式类似于 (8.19) 式。Ai 这一项是原始购买价的利息损失。$\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}$ 这项是周期减值损耗，而 M 则是周期维修费。回忆在 (8.19) 式 M 这一项不需要，因为 R 只是纯耗费。

一项资产的 *核定成本* 是指该资产的无限期的周期费的现时值，即金额为周期费的永久年金的现时值。核定成本也可视为维持一项无限期运转的恒等财产的现时值。记核定成本为 K，则有

$$K = \frac{H}{i} = A + \frac{A - S}{i s_{\overline{n}|j}} + \frac{M}{i}. \tag{8.32}$$

在对可供选择的可能资产进行比较时，既可以用周期费来比较，也可以用核定成本来比较。请读者注意，符号 K 曾在第七章中用来表示债券偿还值的现时值，并在 8.2 节中用来表示借贷忠诚的资金筹措费。

一个复杂之处是不同的资产在单位时间里可能产生数量不等的物件。在这种情形下，就要除以单位时间产生的物件数，这样才能使比较标准化。例如，机器 1 在单位时间里生产 U_1 样物件，而机器 2 则在单位时间里生产 U_2 样物件。这样，如果

$$\frac{A_1 i + \frac{A_1 - S_1}{s_{\overline{n_1}|j}} + M_1}{U_1} = \frac{A_2 i + \frac{A_2 - S_2}{s_{\overline{n_2}|j}} + M_2}{U_2}, \tag{8.33}$$

则机器 1 与机器 2 就是等价的。在上式所有带足标 1 的符号对应于机器 1，带足标 2 的符号对应于机器 2 。

在许多情形下假设 $i=j$ 。倘若如此，则 (8.33) 变为

$$\frac{\frac{A_1}{a_{\overline{n_1}|}}-\frac{S_1}{s_{\overline{n_1}|}}+M_1}{U_1}=\frac{\frac{A_2}{a_{\overline{n_2}|}}-\frac{S_2}{s_{\overline{n_2}|}}+M_2}{U_2}. \tag{8.34}$$

另一个复杂性是以上讨论忽略了通货膨胀。一种更复杂的分析可以考虑通货膨胀。假设通货膨胀率为每时期 r, 固定资产成本为 A 及经过头 n 个时期残值为 S 。可以假设第二个 n 个时期成本为 $A(1+r)^n$ 及残值为 $S(1+r)^n$ 。这一过程可以对相继的一个个 n 个时期一直继续下去，也可以假设维修费按每时期乘上 $(1+r)$ 因子来增长。金融计算对通货膨胀的考虑将在 9.4 节中进一步讨论。

把核定成本的概念和 5.8 节中讨论过的资金预算概念相联系是很有意思的。如同上面 (8.33) 和 (8.34) 式所展示的，核定成本可用来比较可供选择的投资项目。这样，核定成本分析就成为资金预算的一种方法。

例 8.11　机器 1 以 \$100000 出售，年度维修费为 \$2500, 寿命 25 年，残值为 \$2000 。机器 2 的年度维修费为 \$5000, 寿命 20 年，无残值。假设实质利率为 5%, 机器 2 的生产效率 3 倍于机器 1, 求机器 2 的价格使购买者买这两种机器并无差别。

用公式 (8.34), 有

$$\frac{100000}{a_{\overline{25}|}}-\frac{2000}{s_{\overline{25}|}}+2500=\frac{1}{3}\left[\frac{A_2}{a_{\overline{20}|}}+5000\right].$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \{3[100000(0.070952)-2000(0.020952)+2500]-5000\} \\ &\quad 12.4622 \\ &= \$294854 \text{ 或} \$295000, \text{算到 } \$1000 \text{ 为止。} \end{aligned}$$

例 8.12　一家电话公司使用价值每根 \$10 的电话杆。此种电话杆的寿命为 14 年。如果通过防护措施可使杆的寿命延长到 22

年，问电话公司值得为此为每根电话杆花多少钱？假设电话杆无残值，两种类型的电话杆维修费相等，实质利率为 4% 。

利用 (8.34) 式有

$$\begin{aligned}\frac{10}{a_{\overline{14}|}} &= \frac{10+x}{a_{\overline{22}|}},\\ x &= 10\left[\frac{a_{\overline{22}|}}{a_{\overline{14}|}}-1\right]\\ &= 10\left[\frac{14.4511}{10.5631}-1\right]\\ &= \$3.68.\end{aligned}$$

§8.7 卖 空

某些证券投资者认为证券价格大概会下降时，就进行 *卖空* 或 *空头交易* 。对于卖空，是先发生出售，然后发生买进。通常的先买进后卖出的交易则称为 *买空交易* (*多头交易*) 。“做空”或“做多”这两个词常常与这两种交易相联系。

有趣的一点是卖空这种看来是逆向的交易怎么会是可能的。实际上，做卖空交易的投资者是先从第二方借来证券，并在市场上将其卖给第三方。过了一些日子，投资者再从市场上买回这些证券 (希望是以较低的价格) 以还给第二方。买回证券这一返回常称为“卖空补进”。

卖空交易的收益率计算存在某些不可预料的困难。考虑一种情形：一位卖空的投资者出售 \$1000 的股票而在一年后以 \$800 将其买回。显然，赚到了 \$200 的利润，问收益率是多少？

求值方程好象应该是

$$1000(1+i)=800.$$

然而，此方程产生的收益率为 $i = -20\%$, 这显然不合理，因为确实赚到了利润。

可能试图将此业务反过来做，而解求值方程

$$800(1+i) = 1000,$$

它得到一个正的答案，即 $i = 25\%$ 。然而，此答案也无法证明是正确的。因为它是说从 \$800 投资中产生 \$200 利润，但事实上从来也不曾有过 \$800 的投资。

事实上，如果这笔交易确象刚才叙述的那样发生了，那么收益率是不存在的。有人可能更愿意说收益率为无穷大，因为没有投资却得到了利润。这一点在以前的例 5.3 中曾经见到过。

在实践中，卖空交易通常并不象上面例子中那样发生。美国政府有规定，凡卖空者在进行卖空时必须将出售价格的一定百分比，例如 50% 进行储蓄。此项储蓄称为 margin(保证金), 在卖空补进以前此项储蓄不能收回，保证金的百分比可以随时间而变化，由政府规定。读者应注意，这里的 margin 与 8.3 节中的 margin(幅度), 其意义完全不同。

这样，在上述的例子中，如果保证金百分比为 50%, 则卖空者必须在卖空时存款 \$500 。现在就可以计算收益率了。获得利润 \$200, 而存入 \$500 为期 1 年，故收益率为 40% 。

实际上情况比刚才描述的还稍为复杂一点。卖空者还可从保证金储蓄中收取利息，这将使收益率增加。如果卖空者在保证金储蓄中可收 8% 利息，则得到的利息为 $.08(500) = 40$ 。计入这些利息后的收益率应为 $240/500 = 48\%$ 。

精明的读者可能会问到原始卖空收入的利息。在上面的例子中卖空者是否也可以从卖空的 \$1000 收入中得到利息？回答是否定的。政府规定这些卖空收入需保留在一个不带利息的特殊帐户中，直到卖空补进时这笔基金将被用于为卖空补进所作的购买。任何正的余额将是这笔交易的利润，而负的余额则是交易的损失。

在实践中，如果卖空产生损失，则可能在卖空补进前需要附加的保证金。反过来，如果产生利润，则部分保证金可以解除，容许抽回或用于其他目的。这些调整均由政府规定加以控制。

卖空还有一个重要的方面。如果所论的证券支付分红 (如股票) 或利息 (如债券)，则卖空者将被要求向证券购买者支付这些分红或利息，这会减少实现的收益率。

例如，在上例中若卖空售出的股票要支付该年的分红 $60，则卖空者的净利润如下：

卖空收入	+200
保证金利息	+40
股票分红	−60
净利润	+180

现在收益率变为 $180/500 = 36\%$ 。这种要求对于卖空那些有较大金额分红或利息的证券起着重要的抑制作用。

卖空交易本身是一种投机企图，不应轻率进入。卖空者指望证券值有重大下降而他自己可提前解脱。投机于卖空交易通常在较短的时期内进行，故若在较长时期内停留在卖空地位是不常见的。

然而，现已发展了一些包含有证券的多头交易与空头交易的组合的投资策略，它们大大降低了风险，并且也有得到投资的合理回报的很好前景。此种类型交易的一个通用名称叫 *套期保值*，许多这类交易变得相当复杂。事实上，偶而会碰到这类交易确定有利润的情形。这种利润有保证的交易称为 *套利* 。一般说来，这种套利的机会是稍纵即逝的，因为市场价格总是会很快地作出反应以消除这种黄金般的机会。

§8.8 现代金融手段

曾经有一个时期，金融手段的全部比本书中已经讨论过的多

不了多少，也就是债券，优先股，普通股，不动产抵押等。然而，在七十年代和八十年代出现了大量新的、创造性的金融手段。

在本节中我们将向读者简要地介绍一些已发展的较重要的金融手段。这里所列举的当然远远不是完全的。有兴趣要了解更多详情的读者可以参看有关金融或证券的一些标准教科书。许多经纪业者，银行，保险公司也会提供与这些手段有关信息的手册与资料。

最后，本节中的材料都是描述性的，而不是详尽的分析，因为其目的只是要使读者对这些手段的性质有所了解。其中许多手段实际上可以根据本节前几章建立的基本原理来进行分析。在第九章和第十章中也包括了某些进一步的分析。还有一些内容则已超出了本书的范围。

有趣的是，我们已经讨论过的某些证券，其特征类似于本节中将要涉及的一些金融手段。在第七章中我们描述过通知偿还债券和可转换债券。前者提供债券发行人(借款人)以选择的机会，他可以在未来选择偿还或不偿还，依当时条件而定。后者则在未来提供债券持有人(贷款人)以选择的机会，他可以选择在将来把债券换成或不换成普通股。作出选择要看这样做是否有好处。

货币市场基金

货币市场基金给投资者提供了一种具有高度流动性和吸引人的收益的安全投资。有些货币市场基金甚至还提供开支票的便利，使这样的帐户实际上等价于具有吸引人利率的支票活期存款帐户。

货币市场基金所作的投资是多种多样的，有的由政府发行，有的由私营部门发行，通常都是短期的，有固定的收入。因为它们都是短期的，故货币市场基金的利率常随社会上短期利率的变化而频繁波动。

因为货币市场基金一般允许抽回而不需付罚金，故有些投资者当正在考虑各种投资可能性的时候往往把它当作一个临时“存

放”基金的地方。

存款单

存款单(CDs)是另一种由银行发行的短期至中期投资手段，它的利率是确定的，期限也是固定的，通常为30天到6个月。有时也发行长期的CDs，但其利率可以变化。CDs可以有各种面额，较高的面额(例如$100000)会有较高的利率，而较低面额(例如$5000)则利率较低。

CDs比货币市场基金有更稳定的收益率，因为其支付的利率是固定的而不是变化的。但它牺牲了流动性，因为许多CDs对提前抽回是有罚金的。投资者避免罚金的一种办法是在二手市场上将其卖给另一位投资者。

CDs的价值并不随利率水平的变化而波动，这与债券不同。而且投资于CDs可得到一个联邦机构即联邦储蓄保险公司(FDIC)的保障，其最大金额为$100000。

保证投资契约

保证投资契约(GICs)是保险公司为大型投资者(如养老基金)发行的金融手段。它们类似于CDs，可以在一个讲明的时间内(例如1年至5年)保证本金和利息。故其市场价不随利率水平的变化而波动。

然而，某些GICs比CDs有更大的弹性，它们容许在1年的头3个月内有附加的存款。到期前从GICs抽回资金则是被限制的。GICs还常具有保险契约的特征，诸如当其用于养老基金投资时的年金购买选择。

GICs通常有比CDs为高的利率，与国库券的收益率基本相当，但GICs并不由FDIC给以保障。

近来，为了与保险公司竞争，一些银行也发展了一种非常类似的投资手段称为*银行投资契约*(BIC)。BIC中的帐户余额可由FDIC给以保障，最高额为$100000。

共同基金

*共同基金*是由若干单个投资者分别购买份额而共用的投资帐户。其基本好处是比各投资者单独投资有更大程度的多样化。

起先共同基金主要是投资于普通股。近来则共同基金也出现了一些其他的投资选择。即使是在那些传统的普通股共同基金中，各种不同的基金做法也有不同，如有的侧重于本金的安全性，有的则侧重于收入和增长等。

抵押返回证券

抵押返回证券 (MBS) 是用来实现不动产抵押共享的一种证券。这类证券由三家持有大量抵押的政府所有或政府特许设立的公司所发行。投资者接受包括本金和利息的周期性付款。本金的偿还率是变化的，它依赖于基础抵押的清偿率。这三家公司是：

1. 美国政府全国抵押协会 (GNMA) 发行一种称为 "Ginnie Maes." 的 MBS 。GNMA 是由美国政府拥有的，其本金和利息的付款由美国政府保证。

2. 美国联邦住房贷款抵押公司 (FHLMC) 发行一种称为 "Freddie Maes." 的 MBS 。FHLMC 是美国政府特许设立的公司。该公司 (不是政府) 保证本金和利息的付款。

3. 美国联邦全国抵押协会 (FNMA) 发行一种称为 "Fannie Maes." 的 MBS 。FNMA 是美国政府特许设立的公司，该公司 (不是政府) 保证本金和利息的付款。

担保抵押债券

担保抵押债券 (CMOs) 是一种设计来改进传统的 MBS 的新型金融手段。CMOs 包含有与 MBS 同样类型的不动产抵押投资，但它还包含其他复杂结构的投资组合，后者是设计用来减少传统 MBS 中常会出现的资金流的不确定性。

然而，它们并没有特定的到期日，而是按其 "平均寿命" 为基础来出售的。所谓平均寿命是指每 1 元本金预期处于未偿还的平均时间 (假设一张共用抵押的合理的预付款时间表) 。CMOs 的构成使平均寿命范围较广，这样投资者可以有较多的选择。

CMOs 通常有比团体债券更高的收益率，这是用以抵消偿还时间表的不确定性及随之而来的再投资风险。CMOs 为月度或季度付款，而不是象债券那样半年度付款。

CMOs 有较大的流动性，因为对它存在着一个活跃的市场。市场上现有 CMOs 的价格变化趋势与通行利率的变化趋势正相反，这同债券价格类似。

期权

期权 是一种金融手段，它的持有人有权在将来的某一日期按某一固定价格（称为 *协定价格* 或 *议定价格*）买进或卖出某一证券。有两种类型的期权：看涨期权和看跌期权。*看涨期权* 的持有人有权按协定价格购进证券，而 *看跌期权* 的持有人有权按协定价格出售证券。在欧式期权中，期权的运用必须在一个固定的日子，而这一天也就是期权的截止日。而美式期权则不同，它可以在未来的任何一天运用，直至截止日为止。

投资者可以买进或卖出期权。这样，如果投资者认为证券价格大概会上升，他就应购进看涨期权或出售看跌期权。反之，如果投资者认为证券价格将会下跌，则就买进看跌期权或出售看涨期权。

有两项买进或卖出期权的基本动力，它们正处于所讨论范围的两个相反极端。一个动力是投机。期权价格是非常容易变化的，这既带来了获利的可能，也带来了损失的风险。例如，一项债券售价为 \$50, 同时有一项以 \$45 购买此证券的看涨期权。则这项期权至少值 \$5（在截止期前它将以高于 \$5 出售）。假如此证券价格上涨到 \$55, 则此期权至少值 \$10 。这样，基础证券价格上涨 10% 带来期权价值增加几乎 100%, 这种效应称为 *杠杆作用* 。

第二个动力则正相反。期权提供了很大的弹性来发展减少投资风险的套期保值策略。套期保值在 8.7 节中曾简短地讨论过。许多用期权来套期保值的投资策略已成为相当复杂，需要用计算机分析才能有效地实现。

开始的时候只是对普通股才有期权。但近来期权已发展到包括债券的其他证券。甚至对未来的利率也有期权。

保证 是一种先于看跌期权和看涨期权而发展起来的证券。保证很类似于看涨期权，只是它的截止日期可比看涨期权更远。还有一些其他的差别，因为保证是由发行基础证券的企业发行的，而企业一般与它所发行证券的期权并无联系。还有一件有意思的事是，一项可转换债券可以等价于一项正规债券和一项保证放在一起的组合。

期货

期货 是一项契约，在其中投资者承诺在某一未来日期买进或卖出一项资产。价格在文件中固定下来，但付款则要到契约到期之日，即 *交割日* 才支付。期货是在商品市场上开始出现的。但近年来期货市场已发展到各种各样的金融资产如债券，外币及股票市场指数。

一项资产的当前价格称为 *现货价格*，而期货契约中交割日的价格称为 *期货价格* 。如果一位投资者要购买一种证券，他有两种选择。第一种是立即以现货价格购买。第二种是买一项期货契约。按此契约规定，期货价格在交割日之前不必支付，而在交割日则必须按此支付，不管当时市场价格为多少。在后一种情形，投资者可以按购买价赚取延期支付这段时间内的利息。然而，投资者不能收取证券在此时期内的分红或利息。

私下期货

私下期货 非常类似于期货。主要的差别是期货契约是标准化的并在活跃的市场上出售。私下期货契约则是在某两方之间特制的，并不在公开市场上交易。

私下期货契约主要在两个领域中使用，第一个领域是保护企业免受外币汇率波动的影响。许多银行愿意买卖为期长达 1 年或更长的私下期货货币。

第二个领域是锁定期货的利率。例如，一家企业要在 6 个月

后借一大笔钱，则它可以从银行购买一项私下期货契约以立即锁定利率。这种契约提供保护使其在今后 6 个月内免受利率增加的影响。当然，如果利率下降了，则此企业不得不在 6 个月之末以高于市场的利率来借钱。

交换

交换 是两种表现不同的类似金融量之间的互换。有一个例子是 *货币交换*，即借款人在归还贷款时不用原来的货币，而用另一种货币来偿还。借款人是否欢迎这种交换取决于贷款余下部分的交换比率。

第二个例子是 *利率交换* 。商业贷款有两种情况，即固定率借贷与浮动率借贷。固定率借贷有预先确定的利率，相当于本书中前面部分所考虑的借贷。浮动率借贷的利率则按照金融市场上利率的某些外在指标而变动。利率交换就是固定率借贷与浮动率借贷之间的一种交换。

上面所叙述的商业贷款是无担保与无限制的，直到某个最大极限为止，称为 *贷款最高限额* 。在贷款最高限额下企业可以视需要随时借款与还款，仅受最大极限的限制。

以上所讨论的最后四种金融手段，即期权，期货，私下期货及交换，都是 *衍生手段* 的例子。这些手段的价值依赖于市场上的其他金融价值。这些手段都不是直接的所有权或债务，在此意义上，它们不是基本手段。它们只是代表一些由诸如证券价格、利率以及货币兑换率等值去决定其价值的手段。

习　题

§8.2　借贷忠诚

1. 一家财务公司对一项用月度付款来归还的 18 个月贷款收取 12% 的筹措费。

a) 按借贷忠诚所要求的精度求 APR 。

b) 求 APR, 要求精确到与答案 a) 同样的小数点位数。

2. 一家财务公司要求对每 \$100 的原始贷款按 16 个月内每月末付款 \$7.66 来偿还。求此项贷款的实质利率。

3. 一笔 \$12000 的一年期贷款按下列两种安排之一来偿还：

A. 每月末付款 \$1000, 再加上在该贷款批准时支付的 \$1000 资金筹措费。

B. 按照 $i^{(12)} = 12\%$ 的分期偿还表在每月末偿还。

求选择 A 与选择 B 支付利息金额之差。

4. 对习题 3 中的选择 A 与 B 求 APR 。

5. 一位借款人走访三家银行，请他们对一项以 24 次月度分期付款来偿还的汽车贷款开价。第一家银行开价月度付款 X, 它是基于总筹措费等于初始余额，偿还年数与 6.5% 的乘积。第二家银行开价月度付款 Y, 它基于年度实质利率 12.6% 。第三家银行开价月度付款 Z, 它基于月度转换利率 12% 。试排列 X, Y, Z 值的顺序。

6. 一笔 \$8000 年利率 12% 的贷款以三次付款来偿还：

- 在 3 个月之末付款 \$2000 。
- 在 9 个月之末付款 \$4000 。
- 在 12 个月之末付款 X 。

求 X 。

a) 用合众国规则，

b) 用贸易商规则。

7. 某 A 按 10% 的实质利率借款 \$10000, 为期二年。 A 愿意每年末支付利息，第二年末支付本金。在第一年末 A 只能付 \$500 。求在第二年末完全还清贷款所需付的金额。

a) 用精算方法。

b) 用合众国规则。

8. 一位借款人立即存入 \$200 以保证能在一年后借款 \$1000, 借款人必须在两年后偿还 \$1000 。

a) 求这笔业务的两个正的收益率。

b) 借贷忠诚不能判定这一状况，因为只有一次预付。

用等时间方法于借款人的付款而不是贷款人的预付来计算 APR 。

9. 借贷忠诚在处理非正规业务时公布的表格中定义了以下三项：

A 一正规付款的次数。

B 一等价的单次付款时刻 (精确的，并非由等时间方法而得) 。

C 一每 \$1000 付款的资金筹措费 (与借款人的付款而不是预付相关) 。

试证明以下恒等式成立

$$A - a_{\overline{A}|} = A - A(1+i)^{-B} = C\left[\frac{A}{1000}\right].$$

§8.3 不动产抵押

10. 一个家庭购买了价值 \$160000 的房屋。他们先付 25%, 而其余额则以 9% 的 30 年固定率抵押来归还。为了保证这项贷款须在转帐时付 2 个百分点。他们在 9 月 6 日转帐。如果 1/2 点视为利息，此家庭在每月第一天付款，求抵押的第一个日历年内所支付的总利息。

11. 在习题 10 中，如果另外的 1/2 点和所有其他手续费均不必反映在 APR 中，求此项抵押贷款的 APR 。

12. 一项 15 年抵押每月付款 \$1000, 利息为月度转换。在每月之末，借款者付款 \$1000 。除了正规的月度付款之外，借款者还附加付一笔等于下一次正规付款中应偿还的本金金额之款。在这样的安排下，整个贷款经过 90 次付款就全部还清了。证明在

整个贷款期间省下的利息金额为

$$90000-1000\frac{\ddot{a}_{\overline{180}|}}{s_{\overline{2}|}}.$$

13. 一位营造商取得由三次分期付款来支付的 \$2000000 的建筑贷款，第一次是立即付款 \$1000000, 接着是两次各相隔 6 个月的 \$500000 的付款。贷款利息按半年度转换 15%, 且积累到第二年末。到那时，贷款及积累的利息以一项有月度转换利率 12% 的 30 年期抵押来代替。头 5 年的月度抵押付款金额为第 6 年及以后各年付款金额的一半。第一次月度抵押付款应该正在建筑贷款初次支付的两年之后。求第 12 次抵押付款的金额。算到元为止。

14. 一项 \$100000 的贷款用每年末支付的 30 次等额付款来偿还。贷款的实质利率为 8% 。除掉年度付款之外，借款者还必须在贷款开始付一笔初始费。此项初始费为贷款的 2% 但不因而减少贷款的余额。当作出第二次付款时，借款人将剩余的贷款余额全部还清。在考虑到原始费和提早还清贷款的前提下求贷款人的收益率。

15. 一项 10 年期调整率抵押贷款由 \$1000 的季度分期付款来偿还，其原始利率为季度转换 12% 。在第 12 次付款后利率立即上升到季度转换 14%, 而季度分期付款仍为 \$1000 。试计算第 24 次付款后的贷款余额。算到元为止。

16. 一项 \$100000 的 30 年期渐进付款抵押由每年末的年度付款来偿还。头 5 年内的每次付款比前 1 年增加 5%, 以后的每次付款则与第 5 年末的付款相等。贷款实质利率为 9% 。

a) 求第 1 年末的初始付款。算到元为止。

b) 这项贷款是否发生负分期偿还？

17. 一个家庭购买一幢 \$120000 的房子，且先付 15% 。他们能够接受一项现有的 30 年期 8% 抵押，其年度付款是恰好 10 年

前原为 $60000 而制定的。他们取得了一项新的每年付款的"转移"抵押，其利率为 10%, 此项抵押将与前面所接受的抵押同时完全付清。试确定为购买此房子所需的年度抵押付款总额。算到元为止。

18. 一对退休夫妇拥有一幢 $100000 的房子，且其中没有债务。他们取得一项月度转换 12% 的逆向年金抵押，这项抵押将每月付给他们 $500 的额外退休收入。假如这幢房子每年增值 6%, 求五年后这幢房子的抵押资产净值。算到元为止。

§8.4　近似方法

19. 假设单利，推导 (8.11) 式。

20. 试证 i^{cr} 是 $i^{\max}$ 与 $i^{\min}$ 的调和平均。

21. 导出公式 (8.17) 。

22. 一笔 $1200 的贷款连同 $108 的附加利息支出用 12 次等额的月度分期付款来偿还。求第四次付款后的未偿还贷款余额。使用方法分别为：

a) 最大收益率方法。

b) 最小收益率方法。

c) 常数比例方法。

d) 正比例方法。

23. 一笔 9 个月期的分期付款贷款按正比例方法来偿还。若第二次付款的利息金额为 $20, 求第八次付款的利息金额。

24. 一项 $690 的分期付款贷款由 6 次 $50 的月度付款随之以 6 次 $75 的月度付款来偿还。用常数比例方法求此贷款利率的近似值。

25. 有一项分期付款贷款，若用最大收益率方法其收益率为 20%、用最小收益率方法其收益率为 12.5%, 求用正比例方法的收益率。

26. 一项贷款年度实质利率为 i, 由 5 次年度付款 P 来偿还，此贷款按正比例方法分期偿还。第二项贷款也由 5 次年度付款 P

来偿还，但它是用精算方法来分期偿还，而实质利率为 5% 。两笔贷款在第 2 年末的未偿还余额相等，求 $a_{\overline{5}|i}$ 。

27. 试证若需要 $r>1$ 次付款以偿还资金筹措费，则

a) 最大收益率公式成为

$$\frac{2mnK}{2n(n-r+1)L-(n-r)(n-r+1)(L+K)}.$$

b) 最小收益率公式成为

$$\frac{2mnK}{2nrL+(n-r)(n-r+1)(L+K)}.$$

§8.5　减值方法

28. 试校验公式 (8.19) 对债券也成立；其中 A 为价格， S 为偿还值， R 为息票。提示：证明 (8.19) 还原为 (7.9) 式。

29. 用代数方法证明 $\sum_{t=1}^{n} D_t = A - S$ 。

30. a) 一项资产在 10 年期间减值。它在 10 年之末无残值，即 $S=0$ 。如果第 3 年的减值费为 \$1000, 求第 9 年的减值费：

(1) 用偿债基金方法，设 $j=0.05$ 。

(2) 用直线方法。

(3) 用年数和方法。

为什么下降结欠方法不能用？

b) 在上述三种方法的每一种求资产的原始值。

31. 同时购买的两台机器在 20 年内减值。机器 I 购买价为 \$40000, 由年数和方法减值到残值为 \$5000 。机器 II 购买价也是 \$40000, 它由 $j=3\frac{1}{2}\%$ 的偿债方法减值到残值为 S 。在第 18 年末，两台机器的帐面值相等。求 S 。

32. 用 \$15000 买入的一件设备经过 15 年后有残值 \$2000 。它的帐面值按复利方法进行减值计算而决定，其中年利率为 5% 。在第 10 年末，减值方法改变为对最后 5 年用直线方法。试确定第 12 年末的帐面值。算到元为止。

33. 一家公司购买了两台机器。这两台机器预期都可使用 14 年，且均有残值 \$1050 。机器 A 价值 \$2450, 而机器 B 价值 $\$Y$ 。机器 A 用的减值方法是直线方法，而机器 B 用的减值方法是年数和方法。每年末为机器 A 与 B 所付减值费的现时值相等。若实质利率为 10%, 计算 Y 。

34. 一部价值 \$11000 的新机器有残值 \$900 。此机器寿命为 100 年。设

$BVSL_t$ = 此项资产在 t 年末按直线减值方法的帐面值，

$BVSD_t$ = 此项资产在 t 年末按年数和减值方法的帐面值，

对于 t 的何值， $BVSL_t - BVSD_t$ 达到最大？

35. 假设一项资产的帐面值为 t 的连续函数。求使直线方法产生的 B_t 超过常数比例方法产生的 B_t 之值为最大的 t 值的表达式。

36. 一项价值 \$5000 的资产在 n 年之末有残值 \$2000 。假如用年数和方法在第 12 年的减值费为 \$100 。求 n 。

§8.6　核定成本

37. 一台机器售价 \$10000, 在第 10 年末有残值 \$1000 。此机器的年度维修费为 \$500, 设利率为 5%,

a) 求此项资产的周期费。

b) 求此项资产的核定成本。

38. 机器 1 的售价为 \$1000, 在第九年末有残值 \$50 。机器 2 的售价为 \$1100, 在第九年末有残值 \$200 。问利率为多少可使购买这两台机器并无差别？ (假设两台机器的维修费相等)

39. 塑料盘可用 8 年，价值每个 \$20 。金属盘可用 24 年，价值每个 $\$X$ 。对盘的需要将持续 48 年，通货膨胀将使盘的价格每年增加 5% 。如果利率为 10.25%, 试求 X 使购买塑料盘与金属盘并无差别。

40. 重做例题 8.12, 其中假设杆的价格在未来将按每年增加 2% 无限增长。

41. 一家建筑公司购买了价值 \$1000 的木材。问公司最多愿意付多少钱去处理这些木材以使其使用寿命从 10 年增加到 15 年？（不论是否处理，残值均为 \$50）实质利率为 $3\frac{1}{2}\%$ 。

42. 机器 1 售价 \$100000, 第一年的年度维修费为 \$3000, 使用寿命 20 年，无残值。机器 2 第一年的年度维修费为 \$10000, 使用寿命 15 年，无残值。预计机器的价格和年度维修费将按每年增加 4% 在未来无限增长。机器 2 的工作能力为机器 1 的两倍。维修费在每年初支付。设实质利率为 8%, 问机器 2 的价格应为多少，才能使购买这两种机器并无差别？算到 \$100 为止。

§8.7 卖空

43. 在本节的例子中，当保证金的利息与分红付款均考虑在内时收益率为 36% 。问如果需要的保证金是 60% 而不是 50%, 收益率应为多少？

44. 在习题 43 再向前推进一步，如果需要的保证金是 m, 此处 $0 < m \leq 1$, 求将收益率表示为 m 的函数的一般公式。

第九章　进一步金融分析

§9.1　引　言

在前面几章中利息的存在及其大小都是作为事先给定的。这几章处理了各种情况下包含利息的金融计算。大体上，焦点集中于对过去实际交易或将来交易的数学上的分析。

在第九章中将会提出一些更基本的问题，它们会把读者引向经济和金融的世界中去。一个基本的问题是：不论在一般情况或特殊情况下，是什么因素决定了利率的水平？还有一个相关的问题是，在进行包括未来的金融计算时，应该假设取什么样的利率？

在任何现时值计算中着重点总是在未来。对包含未来的金融分析与决策，利用现时值是基本的方法。我们还知道未来常会带来不确定性。所以在对未来情形进行计算时使用利息同仅仅为了记录过去的业务而在计算时使用利息，其考虑问题的观点是有些不同的。

当然，在包含未来的金融分析与决策计算中，强调使用利息不是一件全新的事。例如，在第五章中对贴现资金流的分析，收益率与净现值计算的讨论就包含了这样一种观点。第九章和第十章将依靠这一基础并将其大大拓展。

基于过去的实际经历的利率常称为*居后利率*。相反地，预期在将来发生的利率称为*居前利率*。一个很重要的问题是，前者可以在多大程度上用来估计后者。目前存在的利率则常称为*当前利率*或*市场利率*。

本章中讨论的另一个重要问题是由资产和负债两者所提出的未来资金流的管理。近年来人们越来越认识到资产与负债间的相

互关系是不能被忽视的，而过去却经常会忽视。

§9.2 利息的经济原理

由借款人支付利息给贷款人这种现象在当代经济生活中是这样地普遍，以致我们认为利息的存在是理所当然的。很难想象一种经济能离开利息而运行。

但读者也许不知道，利息在经济活动中并不始终是一个理所当然的方面。事实上，哲学家亚里斯多德曾经谴责取得利息是一种非生产性的和不道德的行为。在中世纪所有的利息都被 Catholic 教堂作为 *高利贷* 加以禁止。在今天，只有“过多的”利息被称为高利贷。在伊斯兰世界的许多地方，利息由于宗教的原因而被认为是不可接受的。

在 1.1 节中我们曾经将利息定义为借款人付给贷款人的某种形式的租金，用以弥补贷款人在贷款给借款人这段时间内由于不能使用这笔资金而受到的损失。更深入地来看一看为什么应当付这样的租金将是很有意义的。已经发展一些不同的理论来解释利息存在的理由。然而，它们基本上可分为两大类，一类从交易的供给方出发，而另一类从需求方出发。

从供给方来看，基本的问题是 *时间偏好* 。大多数个人或企业都非常愿意今天就有权使用钱款，而不是明天有权使用同样数量的钱。今天的钱能够用来满足即刻的需要。而明天的钱则只能用来在一个不肯定的未来满足推迟了的需要。于是，利息就应是这样一种价格，它足以使个人与企业克制他们对保留今天的钱款的偏好并愿意出借这些钱。甚至将来确实很需要钱的个人和企业也很容易通过储蓄将当前的钱转移为将来的钱。

从需求方来看，基本的问题是 *资本的再生性* 。实际上所有企业都需要资本以保证成功地运转。有些资本是借来的。归根到底，一家企业只有当使用资本后的赢利大于借这笔资本所花费的

成本时才能算是成功的。当然并非所有借款都是企业借的，也有个人和政府的借款。诚然，这种借款有一部分是用来为当前的消耗筹措资金。然而，也有一部分在某种意义上是用来投资的，例如用个人借款以购买房子及筹措高等教育的费用，用政府借款来建造诸如公路和机场之类的基础设施。最后，一种健康的经济将需要所借钱款的相当大部分用于再生性的投资。

虽然这两种主要的理论并不相同，但它们并不是互不相容的。事实上它们是互相补充的。

以上的讨论只不过大致地刻划了那些试图解释利息之存在的经济学、心理学和哲学的理论。然而这些讨论对于本书的目的已经足够了。读者如想更完整地考察这一领域，可以参看经济和金融方面的相关文献。

§9.3 利率水准的决定

在 9.2 节中提供了利息存在的原理。但其中很少涉及在各个时刻的利率水准。

如果回顾一下过去年代的利率，我们会发现它会随时间而发生很大的变化。1945 年美国短期国库券的平均收益率为 0.33%，而在 1981 年同一种证券的平均收益率为 14.71% 。在 1980 年 8 月最低贷款利率为 11%, 到了 1980 年 12 月同一贷款的利率竟达到 21.5%, 怎样解释如此大的变化呢？

在考察利率水准时需要区分两种不同的变化类型。第一种变化类型是通常的，且从属于市场上通行利率的总体水平。第二种变化类型是特殊的，且从属于某一特定业务的利率水准。

基本经济理论告诉我们，利率象其他价格一样，建立在供求关系之上。如果求过于供，利率将上升；而如果供过于求，则利率将下降。这听起来很简单，但在实践中会有大量的因素以复杂的形式合在一起决定利率。

下面所列举的是影响利率水准的一些主要因素。这里所列举的当然并非详尽无遗，但确已包含了多数主要的决定因素。

1. 潜在“净”利率

多数经济和金融理论家相信，存在着一个作为基础的潜在“净”利率，它与经济的长期再生性增长有关。如果没有通货膨胀，这一利率将成为无风险投资的通行利率。这一利率在长达数10年的期间是相对稳定的。在美国，它通常在2%到3%之间。

2. 通货膨胀

经验也证明，通货膨胀对利率有重大的影响。在9.4节中将详细讨论这一因素。

3. 风险和不确定性

经验也证明，风险和不确定性对利率有重大的影响。在9.5节中将详细讨论这一因素。

4. 投资时间长度

在市场上通常短期与长期的贷款和投资，其利率是不同的，而其他方面都相同。此种现象在9.6节中将详细讨论。

5. 信息特性

在金融理论中，“高效率”的市场是定义为那种购买者和出售者(此处为借款人和贷款人)具有同样信息的市场。利率的反常更容易在“低效率”的市场中发生。在当今计算机信息的时代，市场比过去更趋向于高效率。然而，仍然保留着某种市场的“刚性”，它会对利率有影响。

6. 法律限制

有些利率是由政府控制的。在美国，近年来有减少控制的趋向，因此这成为一个比过去较不重要的因素。但无论如何，有些利率仍有一定程度的控制。

7. 政府政策

联邦政府通过其金融与财政政策影响甚至控制利率的总体水平。基本的控制是联邦储备局调整经济中货币供应的能力。政府

赤字或盈余的水平也对信贷市场的需求方有很大影响。

8. 随机波动

除上述各项以外，利率随时间的变化还会显示出随机的波动，第十章将介绍利息的随机方法。

在任一时刻，在大量包含利息的金融业务中总会有许多各种各样的利率。然而，其中有几项关键短期利率常被大家看作利率动向的带头羊。这里介绍三种这类关键利率：

1. *最低贷款利率* —— 这是由主要银行在给高度合作伙伴提供贷款时所用的基础利率，许多贷款利率都参考最低贷款利率。

2. *联邦基金利率* —— 这是商业银行之间隔夜交换的储备金利率。这项利率每天变化并提供利率逐日变动的信息。

3. *贴现率* —— 联邦储备局对成员银行收取的贷款利率。这项利率的变化预示着联邦储备局金融政策的重大调整，它很可能产生广泛传播的影响。

与上述利率相比，长期利率并没有单个的关键指标。数年期国库券的收益率可能是长期利率动向的一个合理的指征。短期利率与长期利率的关系将在 9.6 节中进一步讨论。

与利率动向有关的一个常用术语是 *基点* 。一百个基点等于百分之一。这样，如果某一利率从 9% 上升到 9.25%，在金融界会说“利率上升 25 个基点”。

读者在实际应用中可能会碰到的另一个术语是 *差额* 。这一术语经常用来比较两种不同的利率，其中之一常用于国库券。例如，假若一年到期的国库券收益率为 8.25%，而另一种金融手段的收益率为 9.5%，则可以说“超过一年期国库券的差额为 125 个基点”。

§9.4　通货膨胀的认识

有充分证据表明，利率与通货膨胀率是正相关的，也就是说，两

者随时间按同一方向变动。这一现象从表面看来当然是合理的。通货膨胀意味着随时间增长而损失购买力。于是贷款人当然会要求比原来用于补偿资金价值损失时更高的利率。类似地，借款人也会愿意付更高的利率 (尽管是勉强的)，因为他们能够以更"便宜"的钱款去偿还贷款。

实际上，我们需要更深入地讨论上述问题。人们可能会想，这两者之间的关系是当前利率与当前通货膨胀率之间的关系。然而，在研究过这种现象的经济学家们中间流行的观点是，这种关系应该是当前利率与通货膨胀的 *期望率* (而不是 *当前通货膨胀率*) 之间的关系。不幸，这使得凭经验来度量这种关系更为困难，因为通货膨胀的期望率不能客观地直接度量。无论如何，尽管期望率难以精确地度量，证据表明此种关系是确实存在的。

扣除通货膨胀后的利率常称为 *真实利率*，并记为 i' 。而市场上的实际利率常称为 *表面利率*，并记为 i 。我们用不带上标的字母 i 来记，是因为它就是我们在本书中一直使用的熟知的利率。请读者注意我们这里用的"表面" (nominal) 利率与 1.8 节中的 nominal rate (名义利率) 和 7.3 节中的 nominal yield (名义收益) 具有不同的意义，这是一个比较容易混淆的地方。

我们将通货膨胀率记为 r 并暂假设其为常数。这样与上述相关的方程就是

$$1+i=(1+i')(1+r), \tag{9.1}$$

其中 $r>0$ 及 $i>i'>0$，假设通货膨胀率是正的。请读者注意符号 r 曾在 5.9 节中用来代表项目投资率，而在第七章中又曾用来代表债券的息票率。符号 i' 也曾在 8.3 节中用来记不动产抵押的开价年利率。

如果解出 i，就得到

$$i=i'+r+i'r. \tag{9.2}$$

这样，表面利率就等于真实利率加上通货膨胀率再加上这两者的

乘积。因为交叉乘积项通常为小量，故许多人倾向于将其忽略而认为表面利率就是真实利率与通货膨胀率之和。

也可以解出 i'，得到

$$1+i'=\frac{1+i}{1+r},\tag{9.3a}$$

$$i'=\frac{i-r}{1+r}.\tag{9.3b}$$

按照上面概述的理论，i' 随时间的变化将是相对稳定的。然而，i 和 r 将同时上升或下降。上述关系并不精确。i' 并不总是常数，i 与 r 间的联系也并不是精确的。也存在度量与时间延迟的双重问题，因为 r 应当是通货膨胀的*期望率*。因此，这些公式不应被看作为精确的关系，它们更应该被看为经验法则。

无论如何，在进行含有通货膨胀率的计算时公式 (9.3a) 还是相当有用的。例如，假设对在 n 个时期中每时期之末支付的一系列付款求其现时值，其中时刻 0 的基础付款为 R，而其后的每次付款则要反映通货膨胀。如果 r 是周期通货膨胀率，而 i 是周期利率，则由应用公式 (4.39) 可得到这一系列付款的现时值为

$$\begin{aligned}&R\left[\frac{1+r}{1+i}+\frac{(1+r)^2}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{(1+r)^n}{(1+i)^n}\right]\\=\;&R(1+r)\frac{1-\left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i-r}.\end{aligned}\tag{9.4}$$

然而，如果我们使用公式 (9.3a)，则此问题的解答应为

$$R\left[\frac{1}{1+i'}+\frac{1}{(1+i')^2}+\cdots+\frac{1}{(1+i')^n}\right]=Ra_{\overline{n}|i'}.\tag{9.5}$$

(9.4) 式与 (9.5) 式产生相同的数值答案且有一个有趣的字面解释，(9.4) 式表示上述*带有*通货膨胀的付款按*表面利率*计算

的现时值。然而，在 (9.5) 式中看来这与 *排除* 通货膨胀的付款按 *真实* 利率计算的现时值相等。

上述字面解释实际上向我们提供了如下的对实际情形中计算未来付款的现时值的更一般的准则：

1. 如果未来付款不受通货膨胀影响，则按 *表面* 利率贴现。

2. 如果未来付款按反映通货膨胀率来调整，且调整是反映在付款金额上，则也按 *表面* 利率贴现。

3. 如果未来付款按反映通货膨胀来调整，但此调整并不反映在付款金额上，则正确的做法是按 *真实* 利率贴现。

以上讨论包含了现时值分析。如果将通货膨胀与积累值联系起来考虑也是很有意义的。考虑一种通常的情形，有一位投资者以利率 i 投资金额 A, 历时 n 个时期。此项投资在 n 个时期之末按"表面金额"之值为

$$A(1+i)^n. \tag{9.6}$$

然而，在那个未来的日子这笔投资实际上究竟值多少呢？如果通货膨胀率为 r, 则此项投资在 n 个时期之末的购买力为

$$A\frac{(1+i)^n}{(1+r)^n} = A(1+i')^n. \tag{9.7}$$

这样，因为 $i > i'$, 此项投资按"实际金额"之值较低。许多投资者会发现既按"实际"结果也按"表面"结果来分析其投资项目是很有启迪的，它比只分析表面结果要好。在上述讨论中，隐含着一个假定 $i > r$, 即表面利率大于通货膨胀率。一般说来，这一关系是会成立的，特别是对于一个相当长的时期来说。

然而，在某些情形下，至少对某些投资者，情况却可能不是这样。例如，美国在 1979 —1981 期间按消费品价格指数 (CPI, 这可能是使用最广泛的通货膨胀指数) 测得的通货膨胀率为"两位数" (超过 10%) 。而在此期间却有数 10 亿美元按 7% 左右的

利率投资于储蓄帐户。对于这些投资者来说，他们的存款的“表面价值”是增加了，而“实际价值”却下降了。

对于利率与通货膨胀率之间的关系的传统分析感兴趣的读者可以参看本书末参考文献中所列的 I.Fisher (1930) 的著作。

例 9.1　一家保险公司在支付条款下为一项个人伤害诉讼作出年度支付。第一笔 \$24000 的付款刚付出，还要付 10 笔款。未来付款将按照消费品价格指数进行，即假设每年增加 5%, 若利率为 8%, 试求余留债务的现时值。

在此例中表面利率为 $i = 0.08$, 而通货膨胀率为 $r = 0.05$ 。这样，按照 (9.3b) 式真实利率为

$$i' = \frac{0.08 - 0.05}{1 + 0.05} = 0.028571.$$

在实践中，许多人会认为真实利率就是表面利率与通货膨胀率之差，即 $i = 0.08 - 0.05 = 0.03$ 。虽然这是一个容易使用的经验法则，但它确实常常会夸大了正确的值。

由公式 (9.4) 可算出现时值为

$$24000(1.05)\frac{1 - \left[\frac{1.05}{1.08}\right]^{10}}{0.08 - .05} = \$206226,$$

算到元为止。如果使用公式 (9.5), 可得

$$24000a_{\overline{10}|0.028571} = 24000\frac{1 - (1.028571)^{-10}}{0.028571} = \$206.226,$$

也算到元为止。这也从数值上验证了 (9.4) 和 (9.5) 给出的两种方法的等价性。

§9.5　风险和不确定性的反映

在本书的以前各章中，当我们考虑未来的付款时，实际上隐含着一种假定，即这种付款金额都是已知的，而且肯定会在已知

的时刻付款。然后在此前提下继续进行分析。在某些包含利息的金融业务中情况确实是如此，例如，购买国库券并将其保持到到期为止。然而，在另一些情况下会有一种或多种风险和不确定性因素。

在本书中我们使用的“风险”和“不确定性”这两个术语是可以互换的。然而，在会计学的文献中这二者是有区别的。在那里，“风险”是不确定性中可以定量化的子集。于是，风险可以在某些条件下写入金融报表中去，而非定量化的不确定性则不能反映进去。在本书中我们将不作出这样的区别，但读者在别处可能会碰到这样的区别。

当我们用贴现资金流的方法去分析那些包含有对未来时刻的收入与或支出进行估计的商业与金融业务时，风险与不确定性的水平会大大提高。然而，即使对于范围较狭的、意义明确的借贷业务，也存在着可观的风险与不确定性。例如拖欠付款的风险，抵押贷款预付或再筹措资金的可能性，与再投资率相关的风险，及通知偿还债券不确定的偿还日期等。

有两类风险会影响诸如债券和抵押贷款之类投资的市场值。第一种叫 *市场风险*，它是一种由利率变化而引起的未来价格变化的风险。正如我们在前面几章中所看到的，这些投资市场价格的变化方向与通行利率水准的变化方向是相反的。

第二种叫 *信用风险*，它由未来违约的可能性所引起。例如考虑两种债券 A 和 B，它们有同样的息票、偿还值和到期日。债券 A 是由联邦国库发行的，而债券 B 则是高风险的公司债券。显然，由于有违约的风险，债券 B 在市场上的售价要比债券 A 低得多。这样，债券 B 在到期日的收益会明显高于债券 A，因其价格较低。由于这个缘故，高风险债券也常常叫做 *高收益债券* 。

因此，在对债券进行估价时，如果将违约风险转化为计算的收益率的变化，则它将导致收益率的明显增大。然而，这样算出的收益率会误导潜在的投资人。事实上，此收益率只有当所有付

款均由借款人按期付给时才能实现。另一方面，假如确实发生违约，则投资人将受到很大的损失。

让我们用一个简单的例子来表述这些概念。考虑一笔 \$1000 的一年期债券，它有 8% 的年度息票，按票面到期。假如市场上无风险投资的通行收益率为 8%，而市场相信这种证券没有违约风险，则此债券将以 \$1000 出售。

读者可能会问怎样才能确定"无风险"的利率。在美国，国库券的收益被认为是无风险的，所有其他投资均被看作有一定程度的违约风险。

现在考虑一种在其他方面完全相同的债券，它存在可观的违约风险。假设此债券以 \$940 在市场上出售。价格上 \$60 的差别是因为违约风险而给债券购买者的补偿。

如果我们忽略违约的概率而计算此债券的收益率，则有下列求值方程

$$940 = \frac{1080}{1+i},$$

它给出 $i = 0.1489$ 或 14.89% 。这一利率超过无风险利率的部分，即 $14.89\% - 8\% = 6.89\%$，常被称为利率中的*风险上溢*。一般说来，投资的风险越大，风险上溢就越高。

然而，这样算出的收益率会使人误解。如果不发生违约，此债券的收益率确实会是 14.89% 。但如果发生完全违约，则实际上实现的收益率将为 -100% 。如果发生部分违约，则实现的收益率将介于上述两者之间。

人们可能很想知道在购买此种高风险债券时隐含的违约概率。我们定义一次未来付款的*期望现时值* (EPV) 为其现时值乘上付款的概率。可以计算隐含的付款概率 (记为 p)，

$$940 = p\frac{1080}{1.08},$$

它给出 $p = 0.94$ 。因而，隐含的违约概率为 .06 。注意现时值是按无风险利率 8% 计算的。

以上分析看来是有效的，但还需要修正。假如债券购买人确实认为违约概率为高达 .06 的话，他是不大会愿意花 \$940 去买这种债券的。当投资者能够以 8% 收益率买到无风险投资时，为什么他还要去买一种仅有同样高的期望收益率的高风险投资呢？

因此，用象 \$940 这样的价格去购买这样一种高风险债券的一个更合理的解释是：\$60 的价格差部分是代表违约的概率，部分则代表购买者有更高收益作为对风险假设的补偿。

假定投资者认为，象这样程度的风险值应增加 3% 的收益率，即收益率应为 11%，而不是 8% 。这样，隐含的付款概率 p 可由下式决定

$$940 = p\frac{1080}{1.11},$$

它给出 $p = 0.9661$ 。因而隐含的违约概率为 .0339 。显然此答案不是唯一的，收益率与违约概率的其他配对组合方式也可以产生 \$940 的价格。

上面的分析是考虑孤立地购买一种债券。现在转而考虑多种债券的组合，其中每一种都类似于上述的债券，故需应用大数定律。如果此组合的实际违约率为 .0339，则整个组合的收益率将为 11% 。当然，在实际情形中违约率将不是精确地等于 .0339，而是遵循某种形式的概率分布。可以应用数理统计的结果以作出对整个组合预期的各种可能收益率的概率的叙述。这将在例 9.3 中阐述。

现在让我们将上面的例子转一个方向，用另一种观点去看它。假设我们要将风险因素从利率中分离出来并予以定量化。如果此债券的价格为 \$940，而无风险利率为 8%，则在年末的值应为 $940(1.08) = \$1015.20$，这种将风险定量化的途径把期望的偿清值从 \$1080 下调到 \$1015.20 以反映风险，然后按无风险利率计算现时值。

这第二种方法展示了一种有时在金融分析中会造成的误差。将风险定量化的一种方法是调整利率。将风险定量化的第二种方

法是调整付款金额。这是两种不同的，但都是有效的将风险定量化的方法。有时会犯的错误是两者同时进行，即既降低期望的付款金额又提高利率。这样做是有缺点的，因为它“重复计及”所包含的风险。

现在将此结果推广到包含有多次付款的更复杂的情形。考虑在时刻 $1,2,\cdots,n$ 给出的一系列未来付款 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 。例如，有一种 10 年期的 \$1000 债券附有 8% 的年度息票，对其有 $R_1=R_2=\cdots=R_9=80$ 及 $R_{10}=1080$ 。假设各次付款的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 。则这一系列付款的期望现时值为

$$EPV=\sum_{t=1}^{n}R_t(1+i)^{-t}p_t, \tag{9.8}$$

其中 i 是反映如上述讨论所包含风险的适当的利率。

公式 (9.8) 包括了三个关键值：(1) 期望现时值 EPV, (2) 收益利率 i, 及 (3) 对时刻 $t=1,2,\cdots n$ 的付款 p_t 的概率。在实际中碰到的情形是知道两个值求第三个值。

使情况复杂化的一点是存在着许多种可以用的概率 p_t 的形式。常常使用的一种关于违约风险的假设是令违约概率在每一时期中为常数。设此种在一个时期中的常数违约概率为 q 。则对应的不违约概率应为 $p=1-q$ 。在此假设下，第 t 次付款确实支付的概率为

$$p_t=p^t, \tag{9.9}$$

这是因为第 t 次付款只有当头 t 个时间区段均不违约才会支付。在此简化假设下， (9.8) 式变为

$$EPV=\sum_{t=1}^{n}R_t\left[\frac{p}{1+i}\right]^t, \tag{9.10}$$

它比一般形式 (9.8) 更便于应用。当然，付款概率 p_t 取其他形式也是可能的，在这种更复杂的情形下将会用 (9.8) 式。

我们现在来更一般地考虑对一系列未来付款如何计算期望现时值。下面是在任何特定情形中可能会遇到的三类主要风险：

1. 付款概率。

2. 付款金额。

3. 付款时间的确定。

上面所说的违约风险的分析属于第一类。这也是我们在本节中处理的基本风险。对于诸如抵押贷款和债券之类的投资来说，付款的金额和时间看来都是明确的，因此看起来不象有第二类和第三类的风险。

但事实上这些类型的风险也是确实存在的。例如，抵押贷款的预付款连同再投资率的考虑会构成一个值得注意的时间确定上的风险。又如贴息随偿还日期而变化的通知偿还债券就兼有金额与时间的风险。

当我们越出正规借贷业务的范围，而试图去分析更一般的商业与金融业务时，如果其中需要估计在未来不同时刻的收入和(或)支出，则所有三种风险都是重要的。有很多有关这种类型分析的精算学文献，其中许多已越出了本书的范围。

虽然对利率给予风险上溢可能是处理违约风险的一种合适的方法，但它对处理其他类型的风险不一定是合适的。

例如，考虑两笔投资 A 和 B 。它们在 20 年内每年之末都支付估计 $1000 的款项。投资 A 有相对较低的风险故其现时值按 10% 利率计算。投资 B 有相对较高的风险，其现时值按 20% 利率计算。表 9.1 比较了这两项投资第一次付款和最后一次付款的现时值 (算到元为止) 。

这样，对第一年末的付款， B 的现时值与 A 的现时值的比值是 92% 。然而，对第 20 年末的付款，此比值成为 17% 。如果说 B 的风险较大是由于违约概率随时间而增大，则这种比值还是合理的。但如果 B 的风险较大是由于其他因素，例如 20 年期间付款金额有较大变化，则这样的比值就不合理了。

表 9.1 用风险调整利率计算的现时值比较

投资	付款 $1000 的现时值	
	第一年末付款	第 20 年末付款
A	$909	$149
B	$833	$26
比值 B/A	92%	17%

在金融文献中已有相当全面的对资产定价风险的分析。本书 10.4 节中将讨论最常用的资产定价模型。

提醒读者注意在对利率作风险上溢时容易犯一种常见的错误。基于本节中的分析，看来利率风险的反映会使利率增高。这对资产估价当然是正确的，因为利率较高会产生较低的现时值。

然而，对于债务情况却相反。在此种情形下，随风险而调整的利率将低于 (而不是高于) 无风险利率。这一点在会计和金融文献中并非总是正确地认定的，因为人们较多地注意资产的风险分析而较少注意债务的风险分析。

为了研究这种现象，考虑两家保险公司 A 和 B, 它们都希望出售一批由承诺在将来付款组成的债务。然而 A 的债务有相对较低的风险，而 B 的债务则有相对较高的风险。显然，公司 B 不得不比公司 A 付更高的代价以使第三家公司愿意接受这批债务。如果这一较高的代价用利率来度量，这意味着在计算债务的现时值时对公司 B 比对公司 A 要用较低的利率。这一点将在 10.4 节中作更详细的分析。

最后要注意在本节中我们并未处理再投资率的风险，这是一个非常重要的风险，但将在本书中别处处理。

例 9.2 无风险 10 年期债券的通行收益率为 9% 实质利率。一项 $1000 的附年度息票 10 年期债券按息票率 9% 发行。(1) 如果每年的违约概率为 .005, 且投资者需要有 11% 的收益率以补偿违约风险，求投资者愿意支付的购买价格。(2) 求此项业务中

利率的风险上溢。

1. 倘若此债券为无风险，它显然将按票面出售，即价格应为 \$1000 。我们可以用公式 (9.10) 来求实际价格

$$
\begin{aligned}
&90\left[\frac{0.995}{1.11}+\left(\frac{0.995}{1.11}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{0.995}{1.11}\right)^{10}\right]+1000\left(\frac{0.995}{1.11}\right)^{10}\\
=&\ \$852.825.
\end{aligned}
$$

(由几何级数求和。)

2. 由下列求值方程以确定债券的收益率

$$852.825=90a_{\overline{10}|i}+1000(1+i)^{-10}.$$

如果用 7.6 节中建立的方法来迭代解此方程，即得收益率为 $i=11.56\%$ 。这样，利率的风险上溢为 $11.56\%-9\%=2.56\%$ 。值得注意，风险上溢近似等于两种利率的差 (即 11% 减 9%) 再加上违约率 0.5% 。

例 9.3　考虑本节中讲过的一个例子，即一项 \$1000 一年期 8% 的债券以 \$940 出售，如购买者有 11% 的收益率和隐含的违约概率 .0339 。今假设购买了由 500 种这样的债券构成的多种债券组合。试用正态分布去确定整个组合中平均违约概率的 95% 置信区间。

违约概率的标准差等于

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{(0.0339)(0.9661)}{500}}=.0081.$$

从而用正态分布的 95% 置信区间为

$$\mu_p\pm1.96\sigma_p=0.0339\pm1.96(0.0081)$$

或 (0.0180, 0.0498) 。如转换到收益率，则置信区间为 (9.17%, 12.83%) 。

§9.6　收益曲线

另一个影响利率水准的因素是投资时期的长度。通常而言，在任何时刻短期利率与长期利率是不同的，这一现象称为*利率的期限结构*。表 9.2 是一张展示期限结构的假设的时间表。

表 9.2 展示了一种情况，在其中当投资时期长度增大时利率也增高。换言之，长期利率高于短期利率。这种形式在实践中经常会碰到。超过 5 年时期也可处理，但表 9.2 保持较短的时期，使展示概念时较为简单。

表 9.2　假设的利率期限结构

投资时期长度	利率
1 年	7.00%
2 年	8.00
3 年	8.75
4 年	9.25
5 年	9.50

另一种用来描述利率期限结构的方法是绘制*收益曲线*。图 9.1 就描绘了表 9.2 中所得利率的收益曲线。

当利率象表 9.2 中那样随投资时期长度而增长，称为"收益曲线有向上坡度"。图 9.1 中的坡度与通常遇到的相比有些夸大，这是为了使此种效应看得更清楚。

已经发展了几种理论来解释为什么市场上通常碰到的利率会有这种向上的坡度。第一种理论称为*期望理论*。按照这种理论，个人和企业的期望利率在未来上升的百分比大于期望利率在未来下降的百分比。

第二种理论是*流动偏好理论*。按照这种理论，个人和企业作短期投资的意愿强于作长期投资的意愿，这样他们对自己的基金可以有较早的享用权，也就是保持"流动"。必须增加长期投资利率以吸引投资人较长时期地提供基金。自然，这一理论是 9.2 节中讨论的"利息的时间偏好理论"的推广。

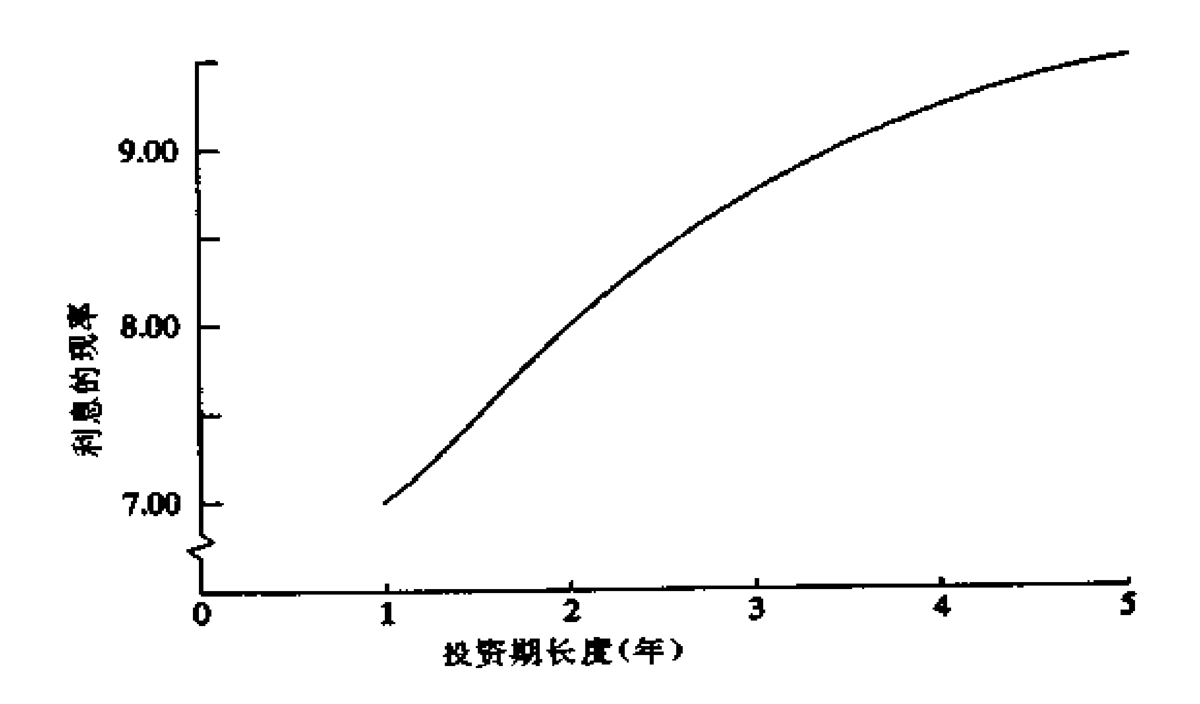


图 9.1　例示收益曲线

第三种理论是通货膨胀上溢理论。按照这种理论，投资者对未来的通货膨胀率感到有很大的不确定性，因此对长期投资要求较高的利率。如同我们在 9.4 节中所看到的，较高的通货膨胀率会导致较高的利率，从而使诸如抵押贷款和债券之类投资的市场价值降低。长期资产价值比短期资产价值更容易受到这种利率变动的影响。

当然，在自由市场上偶然也会发生例外，在某些时候短期利率会超过长期利率。这种情况常用颠倒收益曲线来描述。虽然此种情况并不经常发生，但在 80 年代早期确有一个相当长的时期，在此时期内美国的收益曲线是颠倒的。为什么会发生这种情形呢？有一种解释是：由于联邦储备局实行非常严格的货币政策，以及通货膨胀率相当高，因此造成短期利率高得异常。长期利率

则保持了对常态收益的期望，因此是比较低的。同时还发展了一些其他的理论以解释当时的颠倒收益曲线。

更经常的至少在期限结构中大部分时期遇到的另一种类型是**平坦收益曲线**。例如，它可以在稳定时期发生。在这种稳定时期，投资者并不预期投资市场或未来的通货膨胀率会有很大的变化。

收益曲线中的利率经常称为**现率**。例如，在表 9.2 中三年的现率为 8.75%。这一术语有点类似于 8.8 节中定义的术语“现货价格”。读者可能会问，既然如抵押贷款和债券之类的多数投资包含有在不同时刻付款的混合，那末现率该如何确定呢？实际上，确定现率相对来说是容易的。

有些称为**拆开国库券**的证券是把国库券的息票从偿还值中分离开来。这些各别的息票和偿还值又重新组合成为一系列具有不同期限的无息票债券。这些拆开国库券在任一时刻的收益率提供了无风险收益曲线的即刻读数。这些值很容易从每天的华尔街日报上读到。

对 5.2 节中定义的内返回率的一种批评是认为它忽略了利率的期限结构。而它用一个不计及这笔业务时间长短的单个利率。故从这一观点来看，内返回率的计算包含了收益曲线上许多不同现率的复杂的平均。

我们来考虑对一系列未来付款 (正的或负的) 计算其净现时值的公式 (5.2)

$$P(i)=\sum_{t=0}^{n}v^tR_t. \tag{5.2}$$

此公式是基于单个利率 i。

另一种可以使用的做法是将每次付款按其伴随的现率进行贴现。这样，如果将长度为 t 的时期的现率记为 i_t，则公式 (5.2) 的一种推广的形式就是

$$P(i_*)=\sum_{t=0}^{n}(1+i_t)^{-t}R_t. \tag{9.11}$$

我们用符号 $P(i_*)$ 来记这样的事实，即净现时值是基于一系列的现率 i_t 。

读者应注意公式 (9.11) 与公式 (3.35) 是相似的，故现率的使用是 3.9 节中讨论的变利率年金值计算的一个重要的应用。

常可断言，按这样形式计算的现时值能比按常数收益率计算的现时值更好地反映经济现实。例如，让我们考虑两种 10 年期债券 A 与 B 。债券 A 有 5% 的年度息票。而债券 B 有 10% 的年度息票。假设两种债券都按同样的到期收益率来定价。则按照我们以前的分析，对投资者来说这两种债券并无区别，因为其收益率相等。

然而，假如我们计算基于现率的修正值，则我们将会发现这种相等不再成立。这是因为付款的发生方式不相同。债券 A 在到期以前付得相对较少，而债券 B 则付得相对较多。这样，债券 A 与债券 B 相比是更为长期性的投资，这一点当用收益曲线上的不同现率来计算时就会反映出来。在 9.8 节中将给出度量这种平均债券期限的差别的一种解析方法。

另一种利率的形式叫 *今后率* 。这是一种将在未来出现的现率。本质上，今后率可以视为未来的再投资率。

为了说明这一概念，让我们考虑一家企业，它要借一大笔钱，为期 2 年。提供给这家企业的是表 9.2 中展示的收益率曲线。这家企业有两种选择。第一种选择是按 8% 的 2 年现率借款 2 年。第二种选择是先按 7% 的 1 年现率借款 1 年，然后在第 2 年按 1 年后有效的 1 年现率再借款。这个第 2 年的 1 年现率就称为“今后率”。

现在来分析这两种选择。记今后率为 f 。如果

$$(1.08)^2 = (1.07)(1+f),$$

则这两种选择对于这家企业是没有区别的。上式可解出 $f = 0.0901$ 或 9.01%，这就是说，如果这家企业预期今后率会大于 9.01%，则

借款时应该取第一种选择。但假如预期今后率会小于 9.01%, 则应该取第二种选择。请读者注意符号 f 在 5.9 节中曾用来表示项目借贷率。

应该注意，当用到今后率时，我们要仔细地确定两个时期，即推迟的时期和今后率作用的时期。例如，从现在起第 3 年到第 8 年的设想的今后率应该是一个估计的推迟 3 年的 5 年现率。在上面的例子中所用的今后率则是推迟 1 年的 1 年现率。

在利率的期限结构中使用现率和今后率，实际上是在分析投资和借款的各种可选择方案时引进了比我们以前所用更为精确的方法。它已经成为许多更复杂的现代金融业务 (如套期保值和套利决策) 的基础。

本节并没有对这一课题给出全面的阐述，但确实也引进了基本概念。读者可以从本书所附的参考文献中得到对这一课题更深入的了解。

例 9.4　利用表 9.2 中给出的现率来确定在 5 年中每年末付款 \$1000 的现时值。试问多大的常数收益率可以产生同样的现时值？

这些付款的现时值为

$$1000[(1.07)^{-1} + (1.08)^{-2} + (1.0875)^{-3} \\ +(1.0925)^{-4} + (1.095)^{-5}] = \$3906.63.$$

由解 $a_{\overline{5}|i} = 3.90663$ 可以确定等价的常数收益率。如果用 3.8 节中的迭代方法解此方程，可得 $i = 0.0883$ 或 8.83% 。

例 9.5　求例 9.4 中给出的年金在刚作出两次付款之后余下付款的现时值。在那个时刻的今后率预期对所有时期都比当前现率高 1% 。

此项计算的比较日期为 2 年之末。在该时刻尚有三次余下的年金付款待付。预期的今后率比第 1, 2, 3 年 (不是第 3, 4, 5 年)

各高 1% 。因此，余下付款的现时值为

$$1000[(1.08)^{-1} + (1.09)^{-2} + (1.0975)^{-3}] = \$2524.07.$$

§9.7 利率假定

在标准借贷业务的领域中，所包含的利率通常是由该项业务的条款所规定或隐含在这些条款中。例如，抵押贷款的贷款利率和债券的到期收益率或者是已知的，或者很容易确定。在本节中我们已讨论过的其他借贷业务一般也是如此。

然而，正如我们所已经见到的，贴现资金流是一个强有力的分析与决策工具，它在借贷业务之外也能很好地应用。特别是，由于需要分析那些包含有估计未来不同时刻的收入与 / 或支出的一般商业和金融业务，推动了对第五章所述的资金预算，净现时值及内返回率的讨论。

在精算学的领域中广泛地使用了这种类型的分析，在其中未来可能发生事件的现时值分析是一项基本的工作。在会计学领域中这种类型的分析也变得越来越重要。在财务报告中出现越来越多的基于现时值计算的数值。还有许多其他例子可以展现贴现资金流分析在金融分析与决策中的重要性。

在对更复杂情形使用贴现资金流分析时，决策者必须决定在 9.5 节中列举的三个基本要素：

1. 付款概率。
2. 付款金额。
3. 付款时间的确定。

然而，一旦这些都确定了，还存在一个关键的问题：在进行现时值计算时应当用什么样的利率？

在本节中我们将列举若干可能会影响甚至决定利率选择的因素。我们并不试图告诉大家在任何特定情况下决定应该是什么，

这种决定已超出了本书的范围。我们的目的只是提供给读者大量实际存在的选择以及某些考虑的因素。

1. 此利率应该是实际利率还是表面利率？即通货膨胀应如何反映，这一点在 9.4 节中已讨论过。

2. 此利率应该是无风险利率还是风险调整利率？这一点曾在 9.5 节中讨论过。

3. 此利率应该是常数还是应该反映利率的期限结构？这一点曾在 9.6 节中讨论过。另一方面，此利率是不是应当按照由收益曲线以外的因素所激发的某些形式来变化？后面这种变化形式在某些精算计算中是很普通的。

4. 此利率应基于“最佳估计”还是应有某种保守性？如属后者，则应有多大程度的保守性？进一步说，保守性的程度是应该由不确定性的程度来决定，还是由其他因素决定？

5. 此利率是应该在每一种特定情形下随情况而决定，还是应该按类依某种形式进行聚合和平均？

6. 此利率应该是“税前”的还是“税后”的？在本书中我们常避免考虑税的问题。但在实践中对某些类型的计算，要选择适当的利率就不能忽略这一考虑。看一个很简单的例子，一项长时期投资项目的积累值，其中利息收入要课以所得税，则按“税后”还是“税前”算就相差很大。

以上六点指出了对一项现时值计算选取利率时所含有的某些基本考虑。以下五点则列举了选定利率时一些常用的方法。

1. *新交易利率*—— 这是一种应用于“在边缘上的”新交易的利率。在借款的情形，这是对新的债务必须支付的利率。在贷款的情形，这是对新投资的资产可能享有的利率。新交易利率有时也称为*机会利率*。

2. *平均交易利率* —— 这是一批类似的资产或负债的平均利率。在借款的情形下，这是付给未偿还债务的平均利率。在贷款的情形下，这是所投资资产得到的平均利率。后一种利率很类似

于 (且常常等于) 5.7 节中由组合方法产生的利率。

3. 结帐利率 —— 这是一种假定讨论中的付款今天就买进或卖出所应使用的市场利率。在某些情形下，这一利率相对容易决定，因为对讨论中的付款存在着现行的市场。但在另一些情形下，可能不存在现成的市场，这时这种利率的决定就可能是困难的。

4. 资产负债利率 —— 这是在决定应用的利率时考虑到相关连的资产与负债，而不是孤立地考虑某一项资产或负债。这是一种重要的分析类型，在 9.8 节到 9.10 节中将进一步讨论。

5. 指定利率 —— 这是一种处身于所包含实体及所讨论的特定交易之外的利率。一个例子是由立法或条例所规定的利率。第二个例子是基于某种外部指标的利率，例如最低贷款利率或有特定到期期限的国库券利率。

§9.8　持续期限

上面我们已经看到，对于本章中讨论的那些类型的金融分析来说，确定未来付款的时间是重要的。在本节中我们将讨论如何给出能用以度量未来付款时间的某些指标。

可以使用的最粗糙的指标是 到期期限 。例如，对 10 年期的债券，到期期限为 10 。这一指标至少可以将 10 年期债券与 20 年期债券区别开来，但其价值有限。例如，它不能区别两种 10 年期债券，它们分别有 5% 和 10% 的息票。

一个更好的指标是 2.6 节中定义的等时间方法。这一指标是按各个付款时间的加权平均计算的，其中的权是各次付款的金额。这一加权平均可以解释为平均到期期限。设 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 为在时刻 $1, 2, \cdots, n$ 的一系列付款。等时间方法由公式 (2.9) 定义。如应用此公式但将符号改变一下，则有

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot R_t}{\sum_{t=1}^{n} R_t}. \tag{9.12}$$

例如，考虑刚才提到的两种债券。倘若息票为年度给付，则 5% 债券的平均到期期限为

$$\bar{t}=\frac{1\cdot 5+2\cdot 5+\cdots+10\cdot 5+10\cdot 100}{5+5+\cdots+5+100}=8.50.$$

类似地， 10% 债券的平均到期期限为

$$\bar{t}=\frac{1\cdot 10+2\cdot 10+\cdots+10\cdot 10+10\cdot 100}{10+10+\cdots+10+100}=7.75.$$

5% 债券有 8.5 年的平均付款日期，而 10% 债券有 7.75 年的平均付款日期。这样，我们可以说 5% 债券是一种比 10% 债券更长期的债券。这正好印证了我们在 9.6 节中比较债券 A 和债券 B 时所说的话。

另一种甚至更好的指标是 *持续期限* 。有关持续期限的概念类似于等时间方法，但它是用每次付款的现时值而不是付款金额作为权重，即持续期限 $\bar{d}$ 由下式给出

$$\bar{d}=\frac{\sum_{t=1}^{n} tv^t R_t}{\sum_{t=1}^{n} v^t R_t}. \tag{9.13}$$

注意 $\bar{d}$ 是 i 的函数。

公式 (9.13) 的几种特殊情形是重要的：

1. 如果 $i=0$, 则 $\bar{d}=\bar{t}$ 。这是显然的，因为 (9.13) 立即简化为 (9.12) 。由此可见，等时间方法实际上是持续期限的一种忽略利息的特殊情形。

2. 持续期限 $\bar{d}$ 是 i 的递减函数。这一结果将在本节后面加以证明。但这一结果确有有趣的字面解释。当利率增加时， (9.13) 式分子上具有较高 t 值的那些项比具有较低 t 值的那些项打更大的折扣，这就使 t 的总体加权平均值即 $\bar{d}$ 减少。

3. 如果只有一次未来付款，则 $\overline{d}$ 就是付款的那个时刻。只要察看一下 (9.13) 式，则这个直观上很引人入胜的结果是很明显的，因为分子和分母上的和式其实都只有一项，且除了付款时间以外其他的量都消去了。

检验一下当利率变化时一系列未来付款现时值的变化率也是很有意思的。记此现时值为 $P(i)$, 即

$$P(i)=\sum_{t=1}^{n} v^t R_t=\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t} R_t. \tag{9.14}$$

我们现在来定义此现时值的 *单位变化率* (记为 $\overline{v}$) 如下:

$$\overline{v}=-\frac{P'(i)}{P(i)}, \tag{9.15}$$

此处 $\overline{v}$ 为 i 的函数。

公式 (9.15) 的推理与 1.9 节中对贴现效力定义的推理是类似的。 $P'(i)$ 这一项度量了当利率变化时付款的现时值的瞬时变化率。用 $P(i)$ 去除是表示这一瞬时变化率的单位与现时值本身的大小无关。前面加一负号是需要 $\overline{v}$ 为正，因为 $P'(i)$ 为负。

“单位变化率” 这一名称用来描绘 $\overline{v}$ 是适当的，因为 $\overline{v}$ 是一种当利率变化时一系列未来付款的现时值变化有多快的度量。

如将 (9.14) 式代入 (9.15) 式，就得到了很有趣的结果。

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= -\frac{P'(i)}{P(i)} \\
&= -\frac{\frac{d}{di}\sum\limits_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}R_t}{\sum\limits_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}R_t} \\
&= \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} t(1+i)^{-t-1}R_t}{\sum\limits_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}R_t}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{d}}{1+i}. \tag{9.16}$$

因而，单位变化率等于持续期限被 $1+i$ 去除，注意到两者间的密切关系，单位变化率常称为*修正持续期限*。

持续期限与修正持续期限是金融分析中重要的解析工具。如上所述，它们提供了投资时间平均长度的指标，这在考虑再投资的风险时是很有用的。

例如，考虑两种以同样收益率购买的债券 C 与 D 。如果 C 的持续期限等于 5 而 D 的持续期限等于 10, 则在我们不得不耽心再投资率之前，债券 D 产生这一收益率的时间长度两倍于债券 C 。另一方面，债券 C 比债券 D 更为流动易变，这一点在需要产生早期资金流时是重要的，修正持续期限的概念对于 9.9 节中将要建立的免除理论也是很关键的。

普通的持续期限有时也称为 Macaulay *持续期限*, 用此术语可使它与修正持续期限明确地区别开来。这一术语是以 F. R. Macaulay 的名字命名的，他在本节后面列举的文献 (1938) 中引入了持续期限的概念。

如上所述，$\bar{d}$ 是 i 的函数。如果我们来检验一下当 i 变化时 $\bar{d}$ 怎样随之变化，会得到一个很有趣的结果。将 $\bar{d}$ 对 i 求导就得到

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{d}}{di} &= \frac{d}{di}\frac{\sum_{t=1}^{n} tv^t R_t}{\sum_{t=1}^{n} v^t R_t} \\
&= -v\frac{\left[\sum_{t=1}^{n} v^t R_t\right]\left[\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t R_t\right]-\left[\sum_{t=1}^{n} tv^t R_t\right]^2}{\left[\sum_{t=1}^{n} v^t R_t\right]^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -v\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t R_t}{\sum_{t=1}^{n} v^t R_t} - \left(\frac{\sum_{t=1}^{n} t v^t R_t}{\sum_{t=1}^{n} v^t R_t}\right)^2\right] \\
&= -v\sigma^2, \qquad (9.17)
\end{aligned}
$$

这里 σ^2 正是以 $\overline{d}$ 为平均值的那个分布的方差。这一结果同时也证明了 $\overline{d}$ 是 i 的递减函数，因为 $-v\sigma^2$ 必定为负。这就验证了 (9.13) 式后第二点所叙述而未加证明的结果。

另一点关于持续期限的观察也很重要。本节中的分析假定了付款 R_t 独立于利率。虽然这一条件在实践中有时确实成立，但也有时不成立。例如，抵押贷款中的预付款及通知偿还债券中通知特征的运用，都受到利率变化的影响。因此，如果付款 R_t 随利率而变化，则本节的结果将不再有效。

如要对持续期限作进一步的讨论，可参看书末所举出的 R. E. Ferguson 的论文 (1983) 。

例 9.6　假设实质利率为 8%, 求下列投资的持续期限。

(1) 10 年期无息票债券。

(2) 10 年期带 8% 年度息票的债券。

(3) 以本金和利息的等额付款来偿还的 10 年期抵押贷款。

(4) 等额分红付给永久年金的优先股。

1. 因为只包含一次付款，显然有 $\overline{d} = 10$ 。注意这一答案与付给无息票债券的利率无关。

2. 对于偿还值的每一元钱， (9.13) 式给出

$$
\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{0.08(Ia)_{\overline{10|}} + 10v^{10}}{0.08a_{\overline{10|}} + v^{10}} \\
&= \frac{0.08(32.6872) + 10(0.46319)}{0.08(6.7101) + 0.46319} \\
&= 7.25.
\end{aligned}
$$

因此，10 年期带息票债券的持续期限比 10 年期无息票债券要短，这是显然的。

3. 对于抵押付款的每一元钱，公式 (9.13) 给出

$$\bar{d} = \frac{(Ia)_{\overline{10}|}}{a_{\overline{10}|}} = \frac{32.6872}{6.7101} = 4.87.$$

注意这一答案与抵押贷款所付利率无关。这初看起来有点奇怪，但其实是对的。持续期限依赖于等额付款的形式，而不是其金额。还有一点值得注意，10 年期抵押贷款的持续期限比 10 年期债券要短得多。这是因为抵押贷款在每次分期付款中都偿还部分本金，而债券则只在偿还日才偿还本金 (这一说法对于溢价和折扣债券并非严格正确，但溢价和折扣的影响并不大，故上述债券与抵押贷款间的比较仍成立)。

4. 对于分红的每一元钱，(9.13) 式给出

$$\bar{d} = \frac{(Ia)_{\overline{\infty}|}}{a_{\overline{\infty}|}} = \frac{1.08/0.08^2}{1/0.08} = 13.5.$$

注意这一答案与优先股所付的分红率无关。还须注意优先股的持续期限大于任何其他投资。这看来是合理的，因为优先股包含有对永久年金的付款。

§9.9 免 除

到现在为止，我们在本书中大量地分析了各别的业务。现在，我们将把注意力转到考虑整个一批业务的全体，特别是要考虑某些金融单位 (如一家银行，一家保险公司或一项养老基金) 的资产与负债间的内部关系。

资产形成一系列的资金入流。我们将在时刻 $1, 2, \cdots, n$ 发生的资金入流记为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 。类似地，负债形成一系列资金

出流。它们发生在 $1, 2, \cdots, n$, 记为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 。问题是如何在入流与出流之间达到平衡或安全均势。

在建立进一步的理论之前，让我们先来考虑，如果这种平衡不存在将会出现怎样性质的问题。基本的问题是由利率水准的变化所带来的不利影响的风险。

可以看一个例子。有一家金融单位，例如银行或保险公司，发行了一项有保证利率的 1 年期金融手段，例如存款单 (CD) 或保证投资契约 (GIC) 。如果支持这些契约的资产投资“太长”或“太短”, 则这家单位就会有很大的风险。

首先考虑资产的投资“太长”的情形，例如，投资的持续期限等于 2 。如果利率增高金融单位会蒙受损失。在这些条件下，契约持有人会在年底撤回基金。金融单位可能不得不出售资产以偿付给这些离去的契约持有人。然而必须出售的资产价值因利率上升而下降，结果就造成了损失。

其次考虑资产的投资“太短”的情形，例如，对非常短期的投资其持续期限接近于零。现在金融单位会因利率下降而蒙受损失。因为其资产的投资是非常短期的，故其利息所得会很快减少，而可能不够在年底偿付契约所保证的利息。这样也会造成损失。

免除 是一种用来安排资产和负债以减少甚至消灭上面所说的这类问题的方法。换句话说，金融单位可以“免除”由利率水准变化带来的不利影响。

设在时刻 t 的净收入记为 R_t, 即

$$R_t = A_t - L_t \text{对} t = 1, 2, \cdots, n. \tag{9.18}$$

假设来自资产的资金入流的现时值等于来自负债的资金出流的现时值。则由 (9.14) 式我们有

$$P(i) = 0. \tag{9.19}$$

现在给利率一个微小的变化，由 i 变到 $i + \epsilon$ 。如果我们将 $P(i)$

按 Taylor 级数展开到二阶导数，有

$$P(i+\epsilon)=P(i)+\epsilon P'(i)+\frac{\epsilon^2}{2}P''(i+\xi),\text{其中}0<|\xi|<|\epsilon|.$$

如果成立两个条件，$P(i)$ 会有局部极小值。第一个条件是必须有

$$P'(i)=0. \tag{9.20}$$

注意 (9.20) 式可以解释为需要净收入的修正持续期限必须等于零。第二个条件是

$$P''(i)>0. \tag{9.21}$$

如果 $P(i)$ 有局部极小值，我们就得到了免除理论中的一个关键结果；此时利率沿任何方向的微小变化都会增加收入的现时值。这一结果如能达到，当然是非常令人满意的。

$P(i)$ 的二阶导数可用来定义 **凸性** 。即引进如下的 $\bar{c}$ 来描述凸性，

$$\bar{c}=\frac{P''(i)}{P(i)}, \tag{9.22}$$

此处 $\bar{c}$ 为 i 的函数。这一定义的解释类似于由 (9.15) 式所给出的修正持续期限 (单位变化率) 的解释。

很需要从文字上来说明这些结果。负债在很大程度上是由该企业单位所能控制范围以外的力量所决定的。因此，免除就着眼于资产结构的管理。免除的战略是安排好资产使满足下述三个条件：

1. 来自资产的资金入流的现时值等于来自负债的资金出流的现时值。这一条件保证了利用正确的资产金额以支持负债。

2. 资产的修正持续期限等于负债的修正持续期限。这一条件保证了价格关于利率变化的敏感性对资产和负债是相同的。

3. 资产的凸性大于负债的凸性。若此条件满足，则利率的降低将导致资产值的增长大于债务值的增长。反过来，利率的升高将导致资产值的降低小于债务值的降低。

在实践中执行上述免除战略会有一些困难。在此我们举出与免除有关的七个这样的问题：

1. 在计算中使用的利率 i 的选择并不总是很清楚的，根据所选的 i 值可能出现不同的战略。

2. 所使用的方法是针对 i 的微小变化。如果 i 有大的变化不能保证这些方法仍然有效。但确实也发展了一种称为完全免除的方法，它拓展了免除理论，使其对 i 的较大变化也能应用。详情见附录V。

3. 在此方法中没有反映收益曲线。这相当于假设当利率变化时整个收益曲线平行移动。如果实际上是其他的形式，则所用方法就失效了。这只要看一个普通的例子：短期利率常比长期利率更加易变。

4. 免除需要对整个组合频繁地进行再平衡以保持资产与负债的修正持续期限相等。修正持续期限并不是每过去一年就减少一年，它事实上是对不同的投资按不同的比率在改变。

5. 资金流不一定能精确地知道，它可能不得不靠估计。例如，负债可能包含那些事先不能精确决定何时发生的付款。又如，由于抵押贷款的预付款及通知偿还债券的通知方式，都可能造成资产的资金入流的变化。

6. 凸性条件看来似乎意味着当利率沿任何方向变动时都会产生利润。这违背了金融理论中的一个基本原则，即在高效率的市场上不存在较长时期的无风险的套利。

7. 为要达到免除而在准确的到期日所需的资产可能不存在。例如，倘若负债上的修正持续期限太长，就会发生这种情形。

尽管有这些先决条件，上面所说的免除战略的发展仍是在改进投资战略方面前进了一大步。甚至即使免除不能完全实现，则实践中也证明了部分免除总比完全不考虑资产与负债的关系要优越。

一篇早期的介绍免除理论的文章是出自英国精算师 F O. M.

Redington (1952) 。这一概念后来由 I. T. Vanderhoof (1972) 引入北美。此种方法后来又有发展，人们通过消灭或减少上面所举出的一些问题的影响来改进免除的方法。

例 9.7　A 在 1 年之末欠 B \$1100, 需要建立一项投资基金来偿还这笔债务。仅有的可提供的投资为两项：一项是货币市场基金，它当前拥有 10% 的利率，而利率逐日变化；另一项是有 10% 利率的两年期无息票债券。试建立一个基于免除理论的投资计划。设计算中所取实质利率为 10% 。

假设投资于货币市场基金的金额为 x, 而投资于 2 年期无息票证券的金额为 y 。则有

$$
\begin{aligned}
P(i) &= x + 1.21y(1+i)^{-2} & -1100(1+i)^{-1}, \\
P'(i) &= \quad -2.42y(1+i)^{-3} & +1100(1+i)^{-2}, \\
P''(i) &= \quad 7.26y(1+i)^{-4} & -2200(1+i)^{-3}.
\end{aligned}
$$

公式 (9.19) 给出方程

$$P(0.1) = x + y - 1000 = 0.$$

(9.20) 式给出方程

$$P'(0.1) = -\frac{2y}{1.1} + \frac{1000}{1.1} = 0.$$

这就给出了两个未知量的两个方程，所以在这种情况下已没有自由度应用公式 (9.21) 。解这两个方程得 $x = 500$ 及 $y = 500$ 。

虽然我们未能应用公式 (9.21) 以建立投资配置，我们还需要检验一下此答案是否符合凸性。对此有

$$P''(0.1) = \frac{(7.26)(500)}{(1.1)^4} - \frac{2200}{(1.1)^3} = 826.45 > 0.$$

因此我们的战略还是满足 (9.21) 式的，这是一个愉快的结果。

让我们凭经验在 i 的每个方向改变 1% 来看一看结果将如何。对此有

$$\begin{aligned}P(0.10) &= 0,\\ P(0.11) &= 500+\frac{(1.21)(500)}{(1.11)^2}-\frac{1100}{1.11}=0.0406>0,\\ P(0.09) &= 500+\frac{(1.21)(500)}{(1.09)^2}-\frac{1100}{1.09}=0.0421>0.\end{aligned}$$

因此，当 i 离开 $i=10\%$ 向任一方向变动时， $P(i)$ 的值均会增加。这似乎好得不象是真的，但它确实展示了免除战略所要达到的目的。

例 9.8　对例 9.7 中的资产，试计算 (1) 修正持续期限， (2) 凸性。

1. 利用上述表达式中的资产部分，我们有

$$P(i)=x+1.21y(1+i)^{-2}=1000.00$$

及

$$P'(i)=-2.42y(1+i)^{-3}=-909.09,$$

其中取 $x=500, y=500$ 及 $i=0.1$ 。然后应用 (9.15) 式就得

$$\overline{v}=-\frac{P'(i)}{P(i)}=0.90909.$$

另一种方法是用 (9.16) 式。我们有下列的修正持续期限：

货币市场基金： $\overline{v}=0,$

两年期无息票债券： $\overline{v}=\frac{2}{1.1}$ 。

反映我们的投资配置的这两个值的加权平均是

$$0.5(0)+0.5\left[\frac{2}{1.1}\right]=0.90909.$$

作为习题，请读者验证此值等于负债的修正持续期限。

2. 再次利用前述表达式的资产部分，可得

$$P''(i) = 7.26y(1+i)^{-4} = 2479.34,$$

这是在 $y = 500$ 及 $i = 0.1$ 取值。然后用公式 (9.22), 就有

$$\bar{c} = \frac{P''(i)}{P(i)} = 2.47934.$$

作为习题，请读者验证此值大于负债的凸性。

例 9.9　有一项 30 年期等额付款的住房抵押贷款，其利率为月度转换 10.2%, 试求：(1) 付款的修正持续期限，(2) 付款的凸性。

1. 月利率为 .102/12 = 0.0085 。则对月度付款的每一元钱，有

$$P(i) = \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}$$

及

$$P'(i) = -\sum_{t=1}^{n} t(1+i)^{-t-1}.$$

故

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{P'(i)}{P(i)} \\ &= v\frac{(Ia)_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}. \end{aligned}$$

将此表达式以 $n = 360$ 及 $i = 0.0085$ 代入，就得到

$$\bar{v} = \frac{11283.80}{(1.0085)(112.0591)} = 99.85.$$

这样，这些付款的修正持续期限对于此项 360 个月的抵押贷款为不到 100 个月。

2. 为了度量这些付款的凸性，需取 $P(i)$ 的二阶导数

$$\begin{aligned} P''(i) &= \sum_{t=1}^{n} t(t+1)(1+i)^{-t-2} \\ &= v^2\sum_{t=1}^{n}(t^2+t)v^t. \end{aligned}$$

为了计算这二阶导数，我们需要计算 $\sum_{t=1}^{n} t^2v^t$ 。由于这一和式包含 360 项，直接计算显然是不方便的。然而，我们可以使用附录Ⅲ中建立的公式来导出闭式的表达式如下：

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n} t^2v^t \\ = &\frac{1}{i}\left[\left\{1+\frac{3}{i}+\frac{2}{i^2}\right\}\right. \\ &\left.-v^n\left\{(n+1)^2+\frac{2n+3}{i}+\frac{2}{i^2}\right\}\right]. \end{aligned} \tag{9.23}$$

对此表达式在 $n=360$ 及 $i=0.0085$ 处计算，就得到

$$\sum_{t=1}^{360} t^2v_{0.0085}^t = 1940079.$$

从而就有

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{P''(i)}{P(i)} \\ &= \frac{v^2\left[\sum\limits_{t=1}^{n} t^2v^t + (Ia)_{\overline{n|}}\right]}{a_{\overline{n|}}} \\ &= \frac{1940079+11283.80}{(1.0085)^2(112.0591)} = 17121. \end{aligned}$$

§9.10 资产与负债的匹配

在 9.9 节中叙述的经典免除理论建立以后，已发展了一系列其他的方法。所有这些方法的目的都是一样的，就是在考虑到负债结构的情况下，安排好资产的投资，以使由于利率变动所带来的风险达到最小甚至消灭。

在本节中将介绍两种已建立的非随机性质的方法。至于随机方法将在第十章中讨论。

第一种方法是*绝对匹配*，也称为*专献*。这种方法的基本思想是，将资产组合构造成这样的形式，使得在每一时期中资金入流与由负债而形成的资金出流能精确地匹配。如果这一点能够做到，则金融企业在任何利率变动面前就受到了充分的保护。

举一个例子。考虑一项养老基金，它向一群领养老金者以可以充分预料的形式提供年金。该基金购置了若干种高品质非通知偿还债券的组合，以使得在每一时期中资金入流能与付出的年金精确地匹配，这样一种投资基金常被称为*专献债券组合*。如果这样一种安排确实能做到，那末这项养老基金的投资管理人就轻松了，他可以把脚搁在台子上，读读报纸上的体育版而用不着去看金融消息了！

在实践中，要达到绝对匹配可能是困难的甚至做不到。以下是实现这一战略时会碰到的一些问题：

1. 资金流在负债或资产方面常常不是那么可预料的。这同 9.9 节中所列举的免除的困难与限制中第五点相同。

2. 如果负债在性质上是长期的，就不大可能找到资产的投资使其与负债精确地匹配而不产生再投资的风险。

3. 按照绝对匹配所加的主要限制来构成的基金，其总体收益率可能会低于那种更灵活地构成的基金的收益率。后者多得的收益可能盖住了绝对匹配的好处。

我们要讨论的第二种方法是由 J. A. Tilley 创立的，发表于本书末所附参考文献目录中的一篇论文 (1980) 中。这种方法较为复杂，其详情已超出本书范围。但我们将用一个例子来说明其基本概念。读者如要进一步了解详情请参阅有关论文。

假设有一家金融单位设立一项投资基金，此项基金要承担未来资金出流的付款，让我们集中注意于这项基金由于利率水准变动而产生的两种类型的风险：

1. 当利率下降，风险为不得不以较低的利率进行再投资。这就刺激人们投资于长期金融手段。正常的具有正的斜率的收益曲线也提供这样一种刺激。

2. 当利率上升，风险为不得不出售资产而蒙受损失，同样也失去了以较高利率进行再投资的机会。这刺激人们投资于短期金融手段。

下面的例子展示了一种方法，可用以平衡这两种相互冲突的动向。假设有一家银行对两年期存款单保证 8% 的实质利率。基金可以在第 1 年或第 2 年末抽回存款而不付罚金。这家银行只能以两种形式的金融手段进行投资：

- 产生 8% 实质收益率的 1 年期期票。
- 产生 8.5% 实质收益率的 2 年期期票。

这种形式反映了具有正的斜率的正常收益曲线。这样，我们就遇到了一种新的特征，经典的免除理论对此并不认可其利率的期限结构。

设 s_1 和 s_2 分别为存款单持有人在第 1 年和第 2 年末抽回的基金金额。请读者注意 s_1 和 s_2 是抽回的金额，而不是抽回的比率。对存款单中储蓄的每一元钱，有以下求值方程

$$1 = (1.08)^{-1}s_1 + (1.08)^{-2}s_2,$$

它可以表示为

$$s_2 = (1.08)^2 - 1.08s_1.$$

明确地确认未来的抽回比率是这一模型的第二个新的特征。

设 p_1 和 p_2 分别为银行投资于 1 年期和 2 年期期票的基金比例，显然有 $p_1+p_2=1$ 。设 f 为 1 年期期票在第 2 年的今后 (再投资) 率。明确考虑再投资率是这一模型的第三个新的特征。最后，设 A_2 等于由这项业务所产生的银行基金在第 2 年末的积累值。则有

$$\begin{aligned}A_2 &= [p_1(1.08)-s_1](1+f)+[p_2(1.085)^2-s_2]\\&= [p_1(1.08)-s_1](1+f)\\&\quad +[(1-p_1)(1.085)^2-(1.08)^2+(1.08)s_1]\\&= [(1.08)(1+f)-(1.085)^2]p_1\\&\quad +s_1(0.08-f)+(1.085)^2-(1.08)^2.\end{aligned}$$

我们需要分析 f 的波动对于 A_2 值的影响，从而可以推荐如何选择 p_1 (并随之 p_2) 的战略。

首先考虑利率降低的情形。假设 f 为 7%，这就产生了一个在第 1 年末存款单持有人较低的抽回率，因为这时有将基金留在存款单中的动力。假设抽回金额仅为每原始投资一元钱抽回 10 分，则有

$$A_2=-0.021625p_1+0.011825.$$

我们要求 A_2 大于零，则若 $p_1<.5468$ 就会如此。

其次考虑利率增加的情形。假若 f 等于 9.5% 。这将在第 1 年末对存款单持有人产生一个较高的抽回率，因为在别处可以得到较高的利率。假设抽回金额 s_1 为对于原始投资每一元钱抽回 90 分，则有

$$A_2=0.005375p_1-0.002675.$$

我们要求 A_2 大于零，则若 $p_1>.4977$ 就会如此。

这样，基于上述假设而推荐给银行的投资战略是取 p_1 满足 $.4977 < p_1 < .5468$ 。因为 $p_2 = 1 - p_1$, 这样就决定了投资的配置。

应用这种方法需要投资管理人作出某种关键的假设，而这在经典免除理论中是不需要的。一个关键的假设是在两种情形下今后 (再投资) 率有多高或多低。第二个关键的假设是在两种情形下抽回率为多少。不幸的是，这种方法对这些假设相当敏感，即这些假设的不太大的变化就会造成很不相同的配置战略。无论如何，尽管有这种敏感性，这种方法在实际应用中已证明是有用的。

习　题

§9.4　通货膨胀的认识

1. 表面利率为 8% 而通货膨胀率为 5% 。一项单次储蓄投资 10 年。设：

A = 投资按 “常规元数” (即在时刻 0 计值的元数) 度量在第 10 年末的值。

B = 投资按真实利率计算在第 10 年末的值。

求比值 A/B 。

2. 假设在 10 年内每年初作等额存款而不是只作一次存款，重新做习题 1 。

3. 在一个实质利率为 7% 的储蓄帐户中投资五年。若通货膨胀率为 10%, 求在投资期间损失的购买力百分比。

4. 一位工人为退休后所需而向一项实质利率 8% 的基金投资一笔款项，为期 20 年。利息所得要扣除 25% 的所得税。有两种不同的做法。按做法 A, 存款积累过程不扣除税款，到整个投资时期结束时总扣所得税。按做法 B, 每年的利息所得当即扣除所得税。试求按算法 A 的税后积累与按算法 B 的税后积累之比值。

5. 一位雇员在为一位雇主工作恰满 25 年后退休。这位雇员

在受雇时年薪为 $10000, 以后每年加薪 4% 。这位雇员有资格接受按工资计算的养老金，其中工资的计算为按下述三种算法之一。

a) 求最终工资，

b) 求雇佣的最后 5 年中平均工资，

c) 求全部工作期间的平均工资。

6. 一家企业要购买一幢价值 $240000 的房子，先付 $40000 的现金。这家企业打算得到一笔每年付款的 10 年期抵押贷款。一家抵押公司提供两种方案供选择：

A —— 实质利率为 10% 的标准抵押贷款，

B —— 共享增值抵押贷款，其实质利率只有 8%, 用以交换这所房子今后 10 年内价格增值的 50% 。

此企业估计这所房子每年将增值 3% 。试决定当实质利率分别为

a) 8%,

b) 10%

时，应选择哪一个方案。

§9.5　风险和不确定性的反映

7. 10 年以前，一位投资者投资 $10000 于一项商业投机活动，在每年年底返回 $1500 。恰在当前付款之后，此项投机失败了，损失了 $10000 的投资。年度的收入是投资于一项有 8% 实质利率的基金。试求投资者在此项投资中所实现的收益率。

8. 有一项面值 $1000, 附有 8% 年度息票的 10 年期债券，购买后产生 12% 的实质收益率，求其价格。此处假设息票肯定会按期支付，但借款人偿还本金的概率只是 .98, 即有 2% 的可能性到期时会完全违约。假设由借款人付款的期望现时值来给出适当的价格。

9. 有一项投资，它在 1 年之末收回 $1000 的概率是 90%, 而一无所得的概率是 10% 。实质利率为 25% 。

a) 求此项投资现时值的平均值，即 EPV 。

b) 求此项投资现时值的标准差。

10. 习题 9 中投资的利率风险上溢是多少？

11. 一项附有 \$87.50 年度息票的 20 年期 \$1000 债券以某价格出售，收益率为 9.5% 。若无风险利率等于 8.75%, 求隐含的等额年度违约概率。

12. a) 证明公式 (9.10) 可表示为

$$\mathrm{EPV}=\sum_{t=1}^{n}\mathrm{R}_t e^{-ct}e^{-\delta t}.$$

b) 利息效力中的风险上溢是什么？这个量有时叫做 *违约力* 。

c) 什么是年度违约概率？

d) 什么是 n 个时期中任何时刻的违约概率？

13. 一家抵押公司发行 \$1000000 的 2 年期抵押贷款，其实质利率为 8% 。这项抵押贷款在两年内以每年末支付等额的本金再加上任何应付的利息来偿还。借款人可以在第 1 年末预付抵押而不需付罚金。第 1 年末的实质利率可能是 6% 或 10% 。抵押公司可以在第 1 年末将其所有得到的收入按此利率在第 2 年作再投资。假设借款人为了自己的利益会实现任何预付的选择。违约概率为零。

a) 求对于抵押公司在 2 年之末这些抵押贷款的期望积累值。

b) 求 (a) 中积累值的标准差。

c) 求抵押公司在发放这些抵押贷款时的期望收益率。

d) 由常理来推断 (c) 的答案应小于 8% 。

14. 一项 15 年期的抵押贷款在每年之末有等额年度付款且有 12% 的实质利率。年度违约概率为 1% 。在这些条件下对此项抵押的付款的期望现时值为 \$150000 。

a) 若年度违约概率加倍，求期望现时值。答案算到最靠近的 \$100 为止。

b) 假如考虑到额外的风险，期望现时值是按 14% 的实质利率来重新定值，重做 (a) 。

15. 一位投资者购买了一项 \$1000 带有年度息票的 10% 通知偿还债券。此项债券可在第 10 年末按票面到期偿还，但也可能在第 5 年末按 \$1050 通知偿还。投资者可以将得到的任何收入在其后 10 年内按 7% 实质利率进行再投资。投资者为债券付了 \$1100 。假如此债券通知偿还的概率为 .25，试计算投资者为此项投资在今后 10 年内的总体期望收益率。

§9.6　收益曲线

16. a) 利用表 9.2 中的现率，求 \$1000 附有 5% 年度息票的二年期债券的价格。

b) 如果 (a) 中的债券有 10% 年度息票，重做 (a) 。

c) 计算 (a) 中债券在第七章中定义的到期收益率。

d) 类似地对于 (b) 中债券做这项工作。

e) 按常理来论证 (c) 的答案和 (d) 的答案的相对大小。

f) 对于长期债券，你是否预期上述差别会更大？

17. 从另一种不同的角度来考虑习题 16 中的债券。假设一位投资者可以从买两份 5% 债券或一份 10% 债券中进行选择。每种选择产生的息票流是相同的。

a) 求原始投资金额之差。

b) 求债券到期时付出款项之差。

c) 试校核 (b) 正是 (a) 按照现率在债券期限的积累值。

18. 用现率求 $\ddot{s}_{\overline{5}|}$ 的值，其中第 1 年用表 9.2 中的现率，而整个收益曲线对其后每年直至 5 年期末向下移动 .25% 。

19. 基于表 9.2 中给出的收益曲线，求下列期望今后率：

a) 1 年推迟 2 年今后率。

b) 2 年推迟 3 年今后率。

20. 一项有 6% 年度息票的 6 年期债券有 12% 的实质收益率。一项有 10% 年度息票的 6 年期债券有 8% 的实质收益率。求 6 年现率。

21. 一位投资者有 \$100000 要投资 3 年。帐户余额可以在第 1 年末或第 2 年末进行再投资。第 1 年用表 9.2 给出的收益曲线。整个收益曲线在第 2 年会向上移动 2%, 而第 3 年又再向上移动 2% 。试考虑所有可能的投资形式，求在第 3 年投资期满时的最小与最大积累值。算到元为止。

§9.8　持续期限

22. 证明 $\lim\limits_{i\to\infty}\bar{d}$ 等于作出第一次付款的时刻。

23. 给出下列付款序列：

(i) 在时刻 $t=1,3,5,\cdots,19$ 付 \$100 。

(ii) 在时刻 $t=2,4,6,\cdots,20$ 付 \$200 。

要你决定一个时刻 t^*, 使得上述付款序列的现时值等于在时刻 t^* 作单次付款 \$3000 的现时值。假设 $i>0$, 导出 t^* 的精确表达式。

24. 求一项每年年底分红的普通股的持续期限，其中假设每次分红比前一次多 4%, 而实质利率为 8% 。

25. 求 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 修正持续期限的表达式。

26. 证明一项永久年金及此项年金现时值的修正持续期限是相等的。

27. 如果只有一次付款，则 (9.17) 式中的方差 σ^2 应当为零。试对此种情况下 $\frac{d\bar{d}}{di}=0$ 的结果给出字面解释。

28. 一项贷款可这样来偿还： 1 年末付 \$1000, 2 年末付 \$2000, 3 年末付 \$3000 。实质利率为 25% 。

a) 求贷款金额。

b) 求持续期限。

c) 求修正持续期限。

d) 求 (9.17) 式中的方差 σ^2 。

§9.9　免除

29. a) 确认在例 9.8(1) 中得到的资产的修正持续期限等于负债的修正持续期限。

b) 确认在例 9.8(2) 中得到的资产的凸性大于负债的凸性。

30. 求一项半年度转换 8% 10 年期延付年金的现时值，该年金的逐次半年度付款为 $1, 4, 9, \cdots, 400$ 。算到元为止。

31. 导出修正持续期限与凸性间的下列关系：

$$\frac{d}{di}\overline{v} = \overline{v}^2 - \overline{c}.$$

32. 在凸性 $\overline{c}$ 与 (9.17) 式的方差 σ^2 间成立下述关系：

$$\overline{c} = a(i)\sigma^2 + b(i).$$

求函数 $a(i)$ 与 $b(i)$ 。

33. a) 在例 9.7 中，假设投资者投入 \$600 于货币市场基金及 \$400 于两年期债券，求：

(1) P(0.09) 。

(2) P(0.10) 。

(3) P(0.11) 。

b) 假设投资者投入 \$400 于货币市场基金及 \$600 于两年期债券，重做 (a) 。

c) 对于 (a) 与 (b) 的答案与例 9.7 答案的相互比较给出字面解释。

34. 设实质利率为 8%, 求下列投资的凸性：

a) 一项货币市场基金。

b) 一项 10 年期无息票债券。

c) 一项向永久年金付等额分红的优先股。

35. 求一项在 n 个时期内以等额分期付款偿还的贷款的凸性，设 $i = 0$ 。

36. 求习题 24 中普通股的凸性。

37. 一家金融单位从一位顾客处接受了一笔 \$85000 的储蓄，它保证付 8% 的年度复利，为期 10 年。提供给这家单位的仅有的投资选择是 5 年期无息票债券与优先股，两者收益率都是 8% 。这家单位按照下述的推理来建立其投资策略：

(i) 5 年期无息票债券的持续期限为 5 。

(ii) 优先股的持续期限为 13.5 (见例 9.6(4)) 。

(iii) 对顾客的债务的持续期限为 10 。

(iv) 取持续期限的加权平均，投资于 5 年期无息票债券的金额取为

$$\frac{13.5-10}{13.5-5}(85000)=\$35000,$$

而投资于优先股的金额取为

$$\frac{10-5}{13.5-5}(85000)=\$50000.$$

假设顾客在整个 10 年期间均将基金留置储蓄，试说明上述投资战略基于免除理论是最优的。

38. 一家金融单位有一项在 5 年期内每年底付款 \$10000 的债务。该单位以收入 $10000a_{\overline{5}|0.1}=\$37908$ 来交换承担这笔债务。这家单位仅有的投资选择是 1 年期， 3 年期及 5 年期的无息票债券，收益率均为 10% 。这家单位按照下述的推理来建立其投资策略：

(i) 这笔债务的持续期限是围绕所提供投资选择的持续期限而对称分割的。

(ii) 因此投资的款项应一分为三，对 1 年期、 3 年期及 5 年期无息票债券各投资 \$12636 。

试证明这种投资战略按照免除理论不是最优的，并建立一种更优的投资战略。

§9.10　资产负债相匹配

39. 对于习题 38, 如果也提供收益率为 10% 的 2 年期和 4 年期的无息票债券作为投资选择，证明此时可建立起绝对匹配战略。试决定在此战略下 \$37908 应如何投资。

40. 一家金融单位从一位顾客处接受了一笔 \$20000 的储蓄，它保证在 2 年内支付 10% 实质利率的利息。顾客在第 1 年末表示要抽回本利和的一半。金融单位可以投资于收益率为 10% 的 1 年期无息票债券，也可投资于收益率为 11% 的 2 年期无息票债券。这家单位分析两种选择：

A —— 绝对匹配战略。

B —— 完全投资于 2 年期债券以接受更高的利率。

a) 求在选择 A 下这家单位在开始所取得的利润，

b) 求 1 年期债券的 1 年今后率，使选择 B 与选择 A 等价。

41. a) 重做 9.10 节中的例子，假设今后率分别为 7.5% 和 9%, 而不是 7% 和 9.5% 。

b) 重做 9.10 节中的例子，假设今后率分别为 6.5% 和 10%, 而不是 7% 和 9.5% 。

42. a) 重做 9.10 节中的例子，假设 S_1 分别是 20 分和 80 分，而不是 10 分和 90 分。

b) 重做 9.10 节中的例子，假设 S_1 分别是 0 分和 100 分，而不是 10 分和 90 分。

第十章　利息的随机处理

§10.1　引　言

本书前面各章主要是在决定性的基础上表达利息理论。第十章将向读者介绍利息的某些随机处理。

实际上，在以前各章中亦已有两个方面清楚地引进了概率。第一个是在 9.5 节中考虑了违约概率，第二个是在 9.10 节中关于从存款单中抽回存款的假定。导出持续期限的 (9.17) 式也是依据方差来解释。最后，象通知偿还债券中通知条款的实现及抵押贷款中的预付款比率等方面也都隐含着风险和不确定性。但无论如何，本书中前面所采用的处理方法总体上说是决定性的。

在第十章中我们首先把利率直接考虑为一个随机变量；然后概要地介绍几个在随机基础上的模型，它们在实际中有重要的应用。

我们假定读者已具有数理统计的基础知识。本章中所用到的统计并不高深。

§10.2　独立利率

我们现在把利率考虑为随机变量。在 10.2 节中考虑某一时期的利率独立于其他任何时期的利率的情形。在 10.3 节中将去掉独立的假定而考虑相继的利率以某种形式相关的一些结果。

一个初步的例子

让我们首先来论证这样一件事：期望积累值和期望现时值不一定要等于按期望利率的积累值和现时值。为了论证这种可能性，考虑一单位的投资，为期 10 年，其利率为未知，但大致等于

7%, 8% 或 9% 。由初等统计学知，期望利率是

$$E[i] = \frac{1}{3}[.07 + 0.08 + 0.09] = 0.08.$$

期望积累值是

$$E[(1+i)^{10}] = \frac{1}{3}[(1.07)^{10} + (1.08)^{10} + (1.09)^{10}] = 2.16448.$$

然而按期望利率的积累值是

$$(1.08)^{10} = 2.15892.$$

故在此例子中期望积累值不等于按期望利率的积累值。而会产生期望积累值的利率则由下式决定：

$$(1+i)^{10} = 2.16448,$$

从中可解出 $i = 0.0828$ 或 8.028% 。

对于现时值也会有类似的结果。假设我们希望今天投资一定的金额而在第 10 年之末积累到一单位，并假设未知利率的状况与上面所述一样。

此时期望现时值由下式给出

$$E[(1+i)^{-10}] = \frac{1}{3}[(1.07)^{-10} + (1.08)^{-10} + (1.09)^{-10}] = 0.46465.$$

而按期望利率的现时值则是

$$(1.08)^{-10} = 0.46319.$$

产生期望现时值的利率由下式决定：

$$(1+i)^{-10} = 0.46465,$$

从中可解出 $i = 0.07966$ 或 7.966% 。

积累值

在上面的例子中我们假定不确定的利率在十年期间是常数。下面我们考虑这样的情形：各个时期会有不同的利率，它们服从于某种不随时间而变化的分布。

让我们采用第一章中曾用过的符号，记第 t 个时期 (即从时刻 $t-1$ 到时刻 t) 的利率为 i_t, $t=1,2,\cdots,n$ 。投资 1 在 n 个时期之末的积累值由公式 (1.38) 改一下符号表示为

$$a(n)=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)=\prod_{t=1}^{n}(1+i_t). \qquad (1.38)$$

现在假定所有 i_t 为独立同分布且具有平均值 i 。积累值的平均值为

$$\begin{aligned}E[a(n)] &= E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)\right]\\ &= \prod_{t=1}^{n}E[1+i_t]\ (\text{由独立性})\\ &= (1+i)^n. \end{aligned} \qquad (10.1)$$

注意在此情况下，期望积累值等于按期望利率的积累值。其次考虑积累值的方差，应有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[a(n)] &= E[a^2(n)]-\{E[a(n)]\}^2\\ &= E[a^2(n)]-(1+i)^{2n}. \end{aligned} \qquad (10.2)$$

假设各 i_t 有方差 s^2 。现在可以计算 $a(n)$ 关于原点的二阶矩

$$\begin{aligned}E[a^2(n)] &= E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^2\right]\\ &= \prod_{t=1}^{n}E[(1+i_t)^2]\ (\text{由独立性})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{t=1}^{n} E[1+2i_t+i_t^2] \\
&= (1+2i+i^2+s^2)^n. \qquad (10.3)
\end{aligned}
$$

这一结果是基于这样的事实，即对每一 t 的值

$$\mathrm{var}[i_t] = E[i_t^2] - \{E[i_t]\}^2$$

或

$$s^2 = E[i_t^2] - i^2.$$

这就给出

$$E[i_t^2] = i^2 + s^2.$$

这样，积累值的方差由下式给出

$$\mathrm{var}[a(n)] = (1+2i+i^2+s^2)^n - (1+i)^{2n}. \qquad (10.4a)$$

它可以写为

$$\mathrm{var}[a(n)] = (1+j)^n - (1+i)^{2n}, \qquad (10.4b)$$

其中 $j = 2i + i^2 + s^2$ 。

现在将上述包含单次付款的分析拓展到等额年金。考虑一项 n 个时期的初付年金。按照在 3.9 节中建立的方法，此项年金的积累值为

$$
\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i_n) + (1+i_n)(1+i_{n-1}) \\
&\quad + \cdots + (1+i_n)(1+i_{n-1})\cdots(1+i_1) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1}). \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 的平均值可由 (3.36) 式得到为

$$\begin{aligned}
E[\ddot{s}_{\overline{n}|}] &= E\left[\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1})\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}E[1+i_{n-s+1}]\ (\text{由独立性}) \\
&= \sum_{t=1}^{n}(1+i)^t \\
&= \ddot{s}_{\overline{n}|i}.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

其次来求 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 的方差。这种形式的级数的方差是复杂的，可见附录Ⅵ。

将 $1+i_t$ 关于原点的一阶矩和二阶矩分别定义为 m_1^s 与 m_2^s，即

$$m_1^s = E[1+i_t] = 1+i \tag{10.6}$$

及

$$m_2^s = E[(1+i_t)^2] = 1+j, \tag{10.7}$$

其中 j 由 (10.4b) 式决定。再应用附录Ⅵ中的结果，就得

$$\text{var}[\ddot{s}_{\overline{n}|}] = \frac{m_2^s + m_1^s}{m_2^s - m_1^s}\ddot{s}_{\overline{n}|j} - \frac{2m_2^s}{m_2^s - m_1^s}\ddot{s}_{\overline{n}|i} - (\ddot{s}_{\overline{n}|i})^2. \tag{10.8}$$

现时值

对于现时值，也象上面对于积累值那样可以得到平行的结果。但我们在选择利率时必须小心，因为一般说来

$$E\left[\frac{1}{1+i_t}\right] \neq \frac{1}{E[1+i_t]}.$$

这样，当处理现时值时必须由下式定义 i:

$$E[(1+i_t)^{-1}] = (1+i)^{-1}.$$

必须强调，这一 i 值与上面对积累值从 $E[i_t]=i$ 中得到的 i 是不同的。

我们的第一个结果是要建立一个对于单次付款的现时值的平均值公式，它类似于公式 (10.1) 。我们有

$$E[a^{-1}(n)]=(1+i)^{-n}. \tag{10.9}$$

(10.9) 式的导出类似于公式 (10.1) 的导出，此事留作习题。

对于现时值的方差有

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[a^{-1}(n)] &= E[a^{-2}(n)]-\{E[a^{-1}(n)]\}^2\\ &= (1+k)^{-n}-(1+i)^{-2n},\end{aligned} \tag{10.10}$$

其中 $(1+k)^{-1}=E[(1+i_t)^{-2}]$ 。

不幸的是，在不知道 i_t 如何分布的情况下，我们能做的只有到此为止了。上面用来对积累值求二阶矩的方法对于现时值不再有效。公式 (10.10) 的演算需要对某一特定的概率密度函数来计算二阶矩。

现在转向我们在 3.9 节中讨论过的一项 n 个时期延付年金的现时值，

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|} &= (1+i_1)^{-1}+(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}+\cdots\\ &\quad +(1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_n)^{-1}\\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1}\end{aligned} \tag{3.34}$$

$a_{\overline{n}|}$ 的平均值是预期的结果

$$E[a_{\overline{n}|}]=a_{\overline{n}|i}. \tag{10.11}$$

(10.11) 式的推导类似于 (10.5) 式，留作习题。

最后，我们来考虑 $a_{\overline{n}|}$ 的方差。定义 m_1^a 和 m_2^a 分别为 $(1+i_t)^{-1}$ 关于原点的一阶矩和二阶矩，即

$$m_1^a = E[(1+i_t)^{-1}] = (1+i)^{-1} \tag{10.12}$$

及

$$m_2^a = E[(1+i_t)^{-2}] = (1+k)^{-1}. \tag{10.13}$$

再应用附录Ⅵ的结果，遂有

$$\mathrm{var}[a_{\overline{n}|}] = \frac{m_2^a + m_1^a}{m_2^a - m_1^a} a_{\overline{n}|k} - \frac{2m_2^a}{m_2^a - m_1^a} a_{\overline{n}|i} - (a_{\overline{n}|i})^2. \tag{10.14}$$

求数值解

由上所述，如果我们知道了 $1+i_t$ 和 $(1+i_t)^{-1}$ 的一阶矩和二阶矩，我们就能对单次付款或等额年金求出积累值或现时值的平均值和方差。我们可以选择对 i_t 的概率密度函数作出假设。不幸的是，甚至即使知道了平均值和方差，以上的公式一般也并不导致已知的概率密度函数。

在实践中处理这种情形的标准方法是利用“模拟”。其过程如下：

1. 作出一个适当的关于 i_t 的概率密度函数及其参数的假设。

2. 形成一系列足够多的随机数以运行所需要的大量试验。如果需要作 m 次试验，则需要 mn 个随机数。

3. 利用标准模拟方法，用这些随机数来计算 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的值的 m 个集合。

4. 对 m 组集合 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中的每一个，计算需要的金融函数，例如 $a(n), a^{-1}(n), \ddot{s}_{\overline{n}|}, a_{\overline{n}|}$ 或某些其他函数。

5. m 个结果可用来对金融函数建立近似的概率密度函数。对各种可能的结果的估计概率可由这 m 个结果算出。

我们不打算进一步讨论模拟方法，因为我们假定读者对此已经熟悉。若读者对此不熟悉可以参阅数理统计的标准教科书。

一种特殊情形

有这样一种特殊情形，对它可以用解析方法得到有用的结果。假设随机变量 $\log_e(1+i_t)$ 服从以 μ 为平均值，σ^2 为方差的正态分布。这样，随机变量 $1+i_t$ 就服从带有参数 μ 和 σ^2 的对数正态分布。带有参数 μ 和 σ^2 的对数正态分布的平均值和方差为

$$\text{平均值} = e^{\mu+\sigma^2/2} \tag{10.15}$$

及

$$\text{方差} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1). \tag{10.16}$$

今由 (1.38) 式得

$$\log_e a(n) = \sum_{t=1}^{n} \log_e(1+i_t). \tag{10.17}$$

上式右边是 n 个独立正态随机变量的和，其中每个随机变量有平均值 μ 及方差 σ^2 。这样，$\log_e a(n)$ 是带有平均值 $n\mu$ 及方差 $n\sigma^2$ 的正态分布，从而 $a(n)$ 是带有参数 $n\mu$ 和 $n\sigma^2$ 的对数正态分布。在此情形下，我们可以直接给出对 $a(n), a^{-1}(n), \ddot{s}_{\overline{n}|}$ 及 $a(n)$ 的可能结果的概率叙述，而不需要藉助于模拟。

回忆一下利息效力的公式 (1.32a)

$$\delta = \log_e(1+i). \tag{1.32a}$$

这样，我们看到 (10.17) 式的右边是一系列 δ 的和。

让我们定义

$$\delta_{[t]} = \log_e(1+i_t). \tag{10.18}$$

上式中的方括号将应用于从 $t-1$ 到 t 这个区间上的 $\delta_{[t]}$ 与仅在瞬时 t 应用的 δ_t 区别开来。(10.18) 式在 10.3 节中将有用处。

采用对数正态分布的动机，不仅是因为它有不用模拟就能够演算本节中公式这一方便之处。经验还表明，它确实提供了利率变化的一个很好的模型。

读者如对独立随机利率感兴趣，可以参阅书后所列举的 P. P. Boyle (1976) 的一篇论文。

例 10.1　假设 i_t 是对于 $t=1,2,$ 及 3 在区间 [.07, 0.09] 上均匀分布的实质利率。试求投资 1 在 3 年之末的积累值的 (1) 平均值。(2) 标准差。

1. 对于均匀分布我们有

$$E[i_t]=i=\frac{a+b}{2}=\frac{0.07+0.09}{2}=0.08.$$

直接应用 (10.1) 式得出

$$E[a(3)]=(1.08)^3=1.25971.$$

2. 对均匀分布有

$$\mathrm{var}[i_t]=s^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(0.09-0.07)^2}{12}=\frac{0.0001}{3}.$$

直接应用 (10.4a) 式得出

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[a(3)] &= \left[1+0.16+0.0064+\frac{0.0001}{3}\right]^3-(1.08)^6\\ &= 0.00013605.\end{aligned}$$

这样，标准差就是 $\sqrt{0.00013605}=0.01166$ 。联系到可能结果的最大范围，即

$$(1.07)^3=1.22504 \text{ 到} (1.09)^3=1.29503,$$

这一答案看来是合理的。

例 10.2　对于 3 年内每年初投资 1 的积累值，重做例 10.1 。

1. 直接应用 (10.5) 式得出

$$E[\ddot{s}_{\overline{3}|}]=\ddot{s}_{\overline{3}|0.08}=3.5061.$$

2. 应用 (10.6) 和 (10.7) 式，就有

$$m_1^s = 1 + i = 1.08$$

及

$$m_2^s = 1 + j = 1.166433.$$

现在应用 (10.8) 式，

$$\text{var}[\ddot{s}_{\overline{3}|}] = 0.0005603,$$

故标准差为 $\sqrt{0.0005603} = 0.0237$ 。联系到可能结果的最大范围，即 $\ddot{s}_{\overline{3}|0.07} = 3.4399$ 到 $\ddot{s}_{\overline{3}|0.09} = 3.5731$, 这一答案看来是合理的。

例 10.3　假定 $1 + i_t$ 遵循带有参数 $\mu = 0.06$ 及 $\sigma^2 = 0.01$ 的对数正态分布，求对于 (1) $a(5)$, (2) $\ddot{s}_{\overline{5}|}$, (3) $a^{-1}(5)$ 和 (4) $a_{\overline{5}|}$ 的平均值和标准差。

1. 平均值

由 (10.15) 式有

$$E[1 + i_t] = e^{0.06+0.005} = 1.067159.$$

应用 (10.1) 式得出平均值

$$E[a(5)] = (1.067159)^5 = 1.38403.$$

标准差

由 (10.16) 式有

$$\text{var}[1 + i_t] = e^{0.12+0.01}(e^{0.01} - 1) = 0.011445.$$

今 $a(5)$ 服从带有参数 5μ 和 $5\sigma^2$ 的对数正态分布，故由 (10.16) 式有

$$\text{var}[a(5)] = e^{5(0.12+0.01)}(e^{0.05} - 1) = 0.098212.$$

这样，标准差就是 $\sqrt{0.098212} = 0.31339$ 。作为习题，请读者用另一种利用 (10.4a) 式的方法确认这一答案。

2. 平均值

由 (10.5) 式得

$$E[\ddot{s}_{\overline{5}|}] = \ddot{s}_{\overline{5}|0.067159} = 6.1023.$$

标准差

由 (10.8) 式有

$$\text{var}[\ddot{s}_{\overline{5}|}] = 0.881737.$$

故标准差为 $\sqrt{0.881737} = 0.9390$ 。

3. 平均值

首先必须分析 $(1+i_t)^{-1}$ 的分布。我们有 $\log_e(1+i_t)^{-1} = -\log_e(1+i_t)$，它有带平均值 $-\mu$ 和方差 σ^2 的正态分布。这样，$(1+i_t)^{-1}$ 有带参数 $-\mu$ 与 σ^2 的对数的正态分布。

由 (10.15) 式有

$$E[(1+i_t)^{-1}] = e^{-0.06+0.005} = 0.946485.$$

应用 (10.9) 式给出平均值

$$E[a^{-1}(5)] = (0.946485)^5 = 0.759572.$$

注意 $(1+i)^{-1} = 0.946485$，故 $i = 0.056541$，它与上面 1 和 2 中的利率是不同的。

标准差

由 (10.16) 式有

$$\text{var}[(1+i_t)^{-1}] = e^{-0.12+0.01}(e^{0.01}-1) = 0.009003.$$

今 $a^{-1}(5)$ 有带参数 -5μ 与 $5\sigma^2$ 的对数正态分布，故由 (10.16) 式

$$\text{var}[a^{-1}(5)] = e^{5(-0.12+0.01)}(e^{0.05} - 1) = 0.029581.$$

这样，标准差为 $\sqrt{0.029581} = 0.17199$ 。

4. 平均值

在上面 3 中已求出 $i = 0.056541$ 。故由 (10.11) 式得

$$E[a_{\overline{5}|}] = a_{\overline{5}|0.056541} = 4.2523.$$

标准差

我们有 $(1+k)^{-1} = e^{-0.12+0.01}e^{0.01} = e^{-0.10} = 0.904831$, 所以 $k = 0.105171$ 。用公式 (10.14) 就得

$$\text{var}[a_{\overline{5}|}] = 0.383244.$$

这样，标准差为 $\sqrt{0.383244} = 0.6191$ 。

例 10.4　假设对 $t = 1,2,3$ 有 $E[i_t] = 0.08$ 。并假设 $1 + i_t$ 服从带有 $\sigma^2 = 0.0001$ 的对数正态分布。求投资 1 在 3 年之末的积累值的 95% 置信区间。

随机变量 $\log_e(1+i_t)$ 服从正态分布，其参数为

$$\mu = \log_e(1.08) = 0.076961$$

及

$$\sigma^2 = 0.0001.$$

应用公式 (10.17), 可知 $\log_e a(3)$ 服从正态分布，其参数为

$$\mu = 3(0.076961) = 0.230883$$

及

$$\sigma^2 = 3(0.0001) = 0.0003.$$

$\log_e a(3)$ 的标准 95% 置信区间由下式给出：

$$\mu \pm 1.96\sigma = 0.230883 \pm 1.96\sqrt{0.0003}$$

或 $(0.196935, 0.264831)$ 。对应的 $a(3)$ 的 95% 置信区间则为 $(e^{0.196935}, e^{0.264831})$ 或 $(1.21766, 1.30321)$ 。这是一围绕 $(1.08)^3 = 1.25971$ 的 95% 置信区间。

§10.3 相关利率

在 10.2 节中我们假设每个相继时期的利率 i_t 是独立的。在 10.3 节中我们取消这个假设而来考虑某些结果。

相关利率当然有直观的背景。例如，假定某一个时期的利率明显高于长期平均利率，则不妨认为下一个时期的利率大概会高于平均利率，而不是低于平均利率。如某一时期利率明显低于长期平均利率，则也会有类似的情形。

换言之，历史的经验告诉我们，利息更容易在几个相邻的区间维持高水平或低水平，而不是围绕某个平均利率随机地上下跳动。当我们考虑到利率水准常与经济条件和政府政策有联系这一事实时，上面这种说法更显得有道理。

可以构造许多不同的模型来反映相关性。其中多数已超出本书的范围。然而，我们将讨论一下统计学中时间序列分析的可能应用。

已经建立了几个时间序列模型。其中基本的模型是*滑动平均* (MA) 模型，*自回归* (AR) 模型及这二者的混合。经验证明，AR 模型在描绘利率波动方面比 MA 模型更为成功。

作为引入基本概念的简单例子，让我们来考虑例 10.1 和 10.2 中所用的均匀分布。我们假设，此均匀分布是作用在一个在平均利率两侧各宽 $\alpha > 0$ 的区间上。即如果长期平均利率为 i, 则我们就有在区间 $[i-\alpha, i+\alpha]$ 上的均匀分布。

现在假定，相继的利率可由以下递推公式相联系。

$$i_t = i + k(i_{t-1} - i), \tag{10.19}$$

其中 $0 \leq k \leq 1$ 。这一相关关系是假定，对每个相继的 $t-1$ 值，均匀分布是作用在以 i_{t-1} 为中心的区间上，即区间 $[i_{t-1} - \alpha, i_{t-1} + \alpha]$ 上。

常数 k 是赋予长期平均利率和上一时期利率的相对权因子。如果 $k = 0$, 则就有独立性，可以用 10.2 节中的结果。如果 $k = 1$, 则我们将整个权因子给予上一时期的利率。而介于上述两者之间的 k 值则意味着对 i 和 i_{t-1} 两者都有部分权因子。事实上，我们是在上述两种极端之间构成线性插值。

这一简单的例子实际上包含了所谓一阶自回归过程 (即 AR(1)) 的应用。这样一种过程使一个时期的利率依赖于前一时期的利率。

应用相关形式的对数正态分布得到了成功的结果。这伴随着指明在 (10.18) 式中定义的 $\delta_{[t]}$ 的形式。假定长期平均利息效力为 δ, 即

$$E[\delta_{[t]}] = \delta, \tag{10.20}$$

对 $t = 1, 2, \cdots$ 。

今应用 AR(1) 过程并比上面更完全地建立它。这一过程假定 $\delta_{[t]}$ 是基于长期平均利息效力及上一时期的利息效力。这样，它就具有形式

$$\delta_{[t]} = \delta + k(\delta_{[t-1]} - \delta) + e(t). \tag{10.21}$$

它与 (10.19) 式的相似是显然的。表示式 $e(t)$ 是误差项，假定对于 $t = 1, 2, \cdots$, $e(t)$ 是按照带有平均值 $\mu = 0$ 及方差 σ^2 的正态分布为独立同分布的。

我们不加证明地给出下述结论。 $\delta_{[t]}$ 的方差是

$$\text{var}[\delta_{[t]}] = \frac{\sigma^2}{1 - k^2}, \tag{10.22}$$

而 $\delta_{[s]}$ 和 $\delta_{[t]}$ 间的协方差为

$$\operatorname{cov}[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}] = \frac{\sigma^2}{1-k^2} k^{t-s}, \tag{10.23}$$

对于 $t > s$ 。上述公式需要 $|k| < 1$ 。注意若 $k = 0$ 就有独立性，10.2 节的结果可以应用。

一种更精密的时间序列程序是所谓二阶自回归过程即 AR(2) 。这一过程假定 $\delta_{[t]}$ 是基于长期平均利息效力及前面两个时期的利息效力。即它有形式

$$\delta_{[t]} = \delta + k_1(\delta_{[t-1]} - \delta) + k_2(\delta_{[t-2]} - \delta) + e(t). \tag{10.24}$$

误差项 $e(t)$ 与 AR(1) 过程一样定义。

$\delta_{[t]}$ 的方差由下式给出

$$\operatorname{var}[\delta_{[t]}] = \frac{1-k_2}{1+k_2} \cdot \frac{\sigma^2}{(1-k_2)^2 - k_1^2}. \tag{10.25}$$

$\delta_{[s]}$ 与 $\delta_{[t]}$ 间的协方差则为

$$\operatorname{cov}[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}] = \operatorname{var}[\delta_{[t]}][\tau g_1^{t-s} + (1-\tau) g_2^{t-s}], \tag{10.26}$$

对于 $t > s$ 。其中

$$\tau = \frac{g_1(1-g_2^2)}{(g_1-g_2)(1+g_1 g_2)}, \tag{10.27}$$

而 g_1 和 g_2 是以下特征方程根的倒数

$$f(x) = 1 - k_1 x - k_2 x^2 = 0. \tag{10.28}$$

特征方程可能有虚根。上述公式需要三个条件：

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &< 1, \\ k_2 - k_1 &< 1, \\ -1 < k_2 &< 1. \end{aligned}$$

注意，若 $k_1=k_2=0$, 就有独立性，而 10.2 节结果可以应用。

AR(1) 和 AR(2) 过程方差和协方差公式的推导可以参阅本书末所列参考文献中 G. E. P. Box 与 G. M. Jenkins (1976), 及 R. B. Miller 与 D. W. Weichern (1977) 的著作。基于 AR(1) 和 AR(2) 过程的各种金融函数值的公式则在本书末所列举的 H. H. Panjer 与 D. R. Bellhouse (1980 与 1981) 的两篇论文中已建立。这些结果相当复杂，且已超出本书范围。

上面所引用的实现 AR(1) 与 AR(2) 过程的方法本质上是解析的。但还有一种很容易使用的方法就是模拟。也能构造其他包含相关性的模型并用模拟来实现。很重要的一点是，任何一种模型在正式使用前都应该先用经验数据来测试，以明确此种模型在处理实际已知的结果时优劣程度如何。

例 10.5　假定在一特殊情形下长期平均实质利率为 6%, 而上一年的利率为 9% 。假设每年的利率精确地等于在长期平均利率和上一年利率基础上估计的利率，试对 (1) $k=0.2$ 及 (2) $k=0.8$ 比较由 (10.19) 式在 3 年期间产生的型式。

1. 我们有

$$\begin{aligned}
i_1 &= 0.06+0.2(0.09-0.06) = 0.066,\\
i_2 &= 0.06+0.2(0.066-0.06) = 0.0612,\\
i_3 &= 0.06+0.2(0.0612-0.06) = 0.06024.
\end{aligned}$$

这些值回归于 6% 的平均利率是相当快的。

2. 我们有

$$\begin{aligned}
i_1 &= 0.06+0.8(0.09-0.06) = 0.084,\\
i_2 &= 0.06+0.8(0.084-0.06) = 0.0792,\\
i_3 &= 0.06+0.8(0.0792-0.06) = 0.07536.
\end{aligned}$$

此处回归要慢得多。

这个例子的目的是要展示由不同 k 值所产生的固有型式。当然，在实际中每年的真实利率很可能不同于按长期平均利率和

上 1 年利率估计的利率，故上面所展示的光滑型式其实会高低不平。但是，选择 k 的效应则恰如上例所示，会影响到向长期平均利率回归的大小。

例 10.6　已知 $\delta_{[t]}$ 服从 AR(1) 过程，其平均值 = 0.09, 方差 = .003, 相邻值间的协方差 = 0.002 。 $\delta_{[4]}$ 的估计值为 .075 。求 $\delta_{[3]}$ 的真值。

将 (10.23) 式除以 (10.22) 式得到

$$\frac{\text{cov}}{\text{var}} = k = \frac{0.002}{0.003} = \frac{2}{3}.$$

我们记真值为 δ^A 而估计值为 δ^E 。由 (10.21) 式有

$$\begin{aligned} \delta^E_{[4]} &= \delta + k(\delta^A_{[3]} - \delta) \\ 0.075 &= 0.09 + \frac{2}{3}(\delta^A_{[3]} - 0.09). \end{aligned}$$

由此得出

$$\delta^A_{[3]} = 0.0675.$$

例 10.7　已知 $\delta_{[t]}$ 服从平均值等于 .08 的 AR(2) 过程。给出下列值：

Z	$\delta_{[z]}$ 的真值	$\delta_{[z]}$ 的估计值
1	0.100	0.086
2	0.110	0.094
3	0.090	0.102
4	0.095	0.092

求 $\delta_{[5]}$ 的估计值。

若对 $z = 3$ 与 4 用公式 (10.24), 就有

$$0.102 = 0.08 + k_1(0.11 - 0.08) + k_2(0.10 - 0.08)$$

及

$$0.092 = 0.08 + k_1(0.09 - 0.08) + k_2(0.11 - 0.08).$$

整理化简得

$$\begin{aligned} 0.03k_1 + 0.02k_2 &= 0.022, \\ 0.01k_1 + 0.03k_2 &= 0.012. \end{aligned}$$

这是两个未知量的两个方程，可以解得 $k_1 = 0.6$ 及 $k_2 = 0.2$ 。注意 k 的值满足三个必要条件，故有

$$\delta_{[5]}^{E} = 0.08 + 0.6(0.095 - 0.08) + 0.2(0.09 - 0.08) = 0.091.$$

§10.4 资产估价模型

在 9.5 节中我们曾讨论了风险和不确定性对利率的影响。在本节中我们将拓展这一讨论并向读者介绍金融中最有名的一种模型，即 *资本资产估价模型* 。

建立这一模型是要解释各种类型投资收益率的变化。表 10.1 显示了三种美国证券在 1926 年至 1985 年间的平均名义和真实收益率。这些收益率取自本书末列举的文献中 R. G. Ibbotson 和 R. A. Sinquefield (1986) 发表的数据表。

表 10.1　各种证券名义和真实收益率的比较

证券类型	平均名义收益率	平均真实收益率	平均风险上溢
普通股	12.0%	8.8%	8.4%
共同债券	5.1	2.1	1.7
短期国库券	3.5	0.4	0

在表 10.1 中的平均风险上溢是指有关证券的平均真实收益率超过无风险的短期国库券平均真实收益率之值。这一风险上溢可能是对投资者在这种类型投资中所蒙受风险的补偿。

当平均风险上溢上升时，平均收益率的标准差也会上升，这并不令人奇怪。Ibbotson 和 Sinquefield 也列出了 1926 年至 1985 年期间标准差的表格。这可参看表 10.2 。

表 10.2　各种类型证券收益率标准差的比较

证券类型	收益率的标准差
普通股	21.2%
共同债券	8.3%
短期国库券	3.4%

资本资产估价模型中的一个基本假设是存在两种必须相互区别的不同类型的风险。第一种是*无系统风险*或*唯一风险*。这种类型的风险是反映那种不能解释为总体市场行为的价格波动。通常假定这类风险可以由多样化的组合而消除。换言之，在多样化的组合中，各种证券的无系统的价格变化趋向于互相抵消。

第二种类型的风险是*系统风险*或*市场风险*。这种类型的风险是反映在市场上作为整体的价格波动。系统风险是不能通过多样化来消除的。资本资产价格模型只考虑系统风险，并假定无系统风险可通过多样化来消除。

资本资产估价模型的建立，一开始是用来解释不同普通股的收益率幅度。它也提供了对 5.2 节中定义的贴现资金流分析中所用的恰当利率的深入了解。换句话说，在对各种供选择的投资项目取现时值时所用的利率应当反映估计的资金流中风险和不确定性的程度。

资本资产估价模型的公式为

$$E[r_k] = r_f + \beta_k(E[r_p] - r_f), \tag{10.29}$$

其中

r_k = 某种特定证券 k 的收益率，

r_f = 无风险利率，

r_p = 市场组合的收益率，

$\beta_k =$ 证券 k 系统风险的度量。

本质上，公式 (10.29) 可以这样解释：某一种特定证券的期望收益率等于无风险利率加上市场组合的期望收益率超过无风险利率部分的倍数。这里所谓市场组合是指某一特殊类型的所有证券的集合。

倍数 $\beta_k \geq 0$ 是证券 k 系统风险的一种度量。如果 $\beta_k = 0$，证券 k 就是无风险的。如果 $\beta_k = 1$，则证券 k 系统风险的水平就与市场组合相同。如果 $0 < \beta < 1$，证券 k 有低于市场组合的系统风险；而如果 $\beta_k > 1$，证券 k 就有高于市场组合的系统风险。这些关系可以参看图 10.1 。注意 (10.29) 式是线性关系。

$(E[r_p] - r_f)$ 这个量称为市场组合的 风险上溢 。在 9.5 节中曾首先介绍了利率的风险上溢这一概念。当我们将这个表达式与 β_k 相乘，就得到了所讨论证券的风险上溢。

可以给 β_k 一个统计学的定义

$$\beta_k = \frac{\operatorname{cov}[r_k, r_p]}{\operatorname{var}[r_p]}. \tag{10.30}$$

可以看出 β_k 的这一定义满足上面列举的性质。如果 r_k 是无风险利率，则协方差等于零而 $\beta_k = 0$ 。

当 $\beta_k = 1$，分子上的协方差等于分母上的方差。这一条件可以解释为证券 k 具有与市场组合相同的风险水平。对于 $0 < \beta_k < 1$ 和 $\beta_k > 1$ 的解释分别反映了低于平均和高于平均的风险。

前面已经讲过，资本资产估价模型起初是设计来估计普通股的期望收益率的。这样，市场组合的风险上溢，即 $E[r_p] - r_f$，通常假设为一个接近于表 10.1 中 8.4% 的值。

这个模型曾经受过大量经验数据测试的考验，并且使用得相当好，特别因为它相当简单。然而，人们也指出，除了系统风险以外还有其他一些因素也对实际的收益率有影响，例如季节因素、规模因素等。对特定证券的系统风险也会随时间而变化。

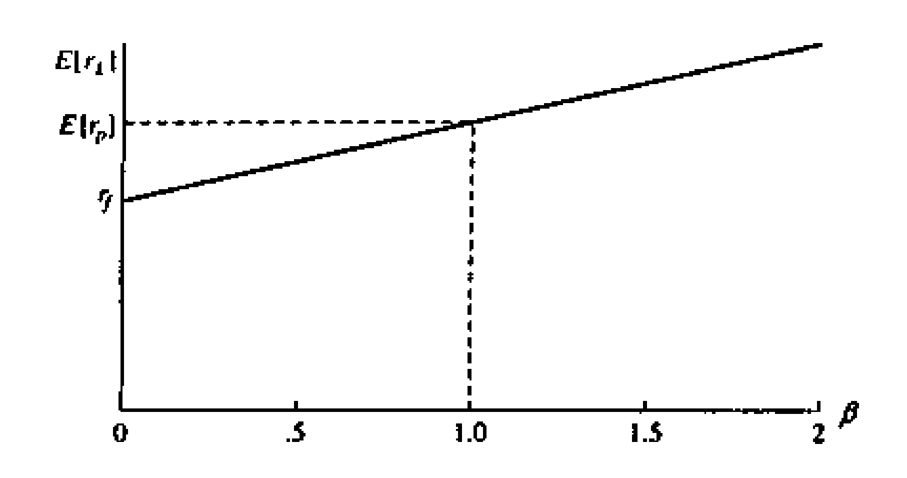


图 10.1　资本资产估价模型的图形表示

无论如何，尽管有这些缺点，这一模型在实际应用中已证明是很有用的。事实上，这种模型用得这样广泛，以致对大量的普通股都计算出 β_k 的值，并周期性地更新和出版。任何主要的经纪商行都提供这些数据。

虽然资本资产估价模型通常是用于普通股分析，它还有更广泛的用途。例如，我们可对共同债券使用风险上溢，并将其应用于各别的共同债券。由表 10.1 可知此时市场组合的合适的风险上溢近似为 1.7% 。某些分析家可能宁愿使用更多地基于近期经历的利率，而不是一直回溯到 1926 年那么远。因为债券价格的波动幅度比普通股小得多 (见表 10.2)，故在决定平均经历时使用较短的时期并不是不合理的。

在 9.5 节中我们讨论过反映风险的两种可选择的途径： (1) 通过利率的风险上溢， (2) 通过期望付款的调整。可以利用上面的结果来建立第二种选择的解析方法。

为了展示这种方法，让我们来考虑一项一个时期的投资。设 $E[W]$ 为不确定的资金流在该时期末的期望值，它以收益率 r 贴

现，其中包含适当的风险上溢。则现时值 V 应为

$$V = \frac{E[W]}{1+r}. \tag{10.31}$$

现在我们将风险在付款中而不是在利率中定量化，然后再按照无风险利率贴现。假设等价的调整付款（它已假设为肯定支付）为 W'，则有

$$V = \frac{W'}{1+r_f}. \tag{10.32}$$

现在来寻找 W' 的表达式并建立 $W' < E[W]$ 。

为了简化符号，现记 $E[r_k] = r$, $E[r_p] = \mu_p$ 及 $\mathrm{var}[r_p] = \sigma_p^2$ 。将 (10.29) 式代入 (10.31) 式就得

$$\frac{E[W]}{V} = 1 + r = 1 + r_f + \beta_k(\mu_p - r_f).$$

将 (10.30) 代入，此表达式成为

$$1 + r_f + \frac{\mathrm{cov}[r, r_p]}{\sigma_p^2}(\mu_p - r_f).$$

今 W 为不确定资金流，但 V 是固定的且并不随 r_p 共变。这样，此表达式就成为

$$1 + r_f + \mathrm{cov}\left[\frac{W}{V} - 1, r_p\right]\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p^2}.$$

作出数量调整得

$$1 + r_f + \frac{\mathrm{cov}[W, r_p]}{V} \cdot \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p^2}.$$

我们定义

$$\lambda = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p^2}. \tag{10.33}$$

表达式 λ 是在市场上每单位市场方差的期望风险上溢。在金融文献中 λ 常被称为 风险的市场价格 。

这样就有

$$\frac{E[W]}{V} = 1 + r_f + \frac{\lambda \mathrm{cov}[W, r_p]}{V}.$$

此式也可改写为

$$V = \frac{E[W] - \lambda \mathrm{cov}[W, r_p]}{1 + r_f}.$$

然而，这就是公式 (10.32)，其中

$$W' = E[W] - \lambda \mathrm{cov}[W, r_p]. \tag{10.34}$$

因为 λ 与协方差一般是正的，故正如预期有 $W' < E[W]$ 。公式 (10.34) 给出了对于不确定资金流 W 的期望值由于不确定性所需作出调整量的表达式。现在可以按照无风险利率来计算现时值。

在 9.5 节中曾经提到，对于资产来说风险调整利率大于无风险利率。然而，对于负债来说风险调整利率会小于无风险利率。正如前面说过的，在某些会计和金融文献中并没有正确地认识这一点，这可能是因为人们对负债的风险分析远没有象对资产的风险分析那样重视。造成这种疏忽的另一个可能的原因是负债并不象资产那样有一个广泛而活跃的市场。

在本书末所列举的 S. P. D'Arcy 所写的一篇论文 (1988) 中，曾经将这种现象与保险准备金联系起来加以分析。 D'Arcy 直接将资本资产估价模型应用于风险债务且证明 β 为负。故由 (10.29) 式，相应的风险调整利率会小于无风险利率。

另一篇也为本书列举的 R. P. Butsic 的论文 (1988) 提出了另一种方法，它也处理保险准备金。Butsic 导出了类似于 (10.29) 的下列公式，它适用于贴现风险负债

$$r_l = r_f - e(r_e - r_f), \tag{10.35}$$

其中有下列定义：

$r_l =$ 用以贴现负债的相应利率，

$r_f =$ 无风险利率，

$r_e =$ 抵押资产净值的利润率，

$e =$ 支持债务的抵押资产净值的度量。

由此，Butsic 也得到了一个结果，它显示在贴现风险负债时风险调整利率低于无风险利率。读者如想更详细地了解有关情况可参阅上面列举的两篇论文。

例 10.8　一种普通股当前以 \$50 出售，并将在 1 年之末付 \$2 的分红。这种股票的 β 值在刚刚过去的时刻为 1.5 。当前的无风险利率为 5.4% 。假设表 10.1 中的普通股风险上溢可以应用，求此股票在 1 年之末价格的期望值。

由 (10.29) 式，我们有

$$E[r_k] = 0.054 + 1.5(0.084) = 0.18.$$

设 P 为 1 年之末价格的期望值。有下列求值方程

$$50 = \frac{2 + P}{1.18},$$

解之可得 $P = \$57$ 。

§10.5　期权估价模型

在 8.8 节中曾对期权给出简要的、描述性的介绍。在 10.5 节中我们将建立两种不同的解析方法，以决定期权的值。

首先考虑一项看涨期权，其持有人有权在到期日以 \$50 购买一份相关的股票。图 10.2 给出了这种看涨期权在到期日之值的图示。

在到期日之前，此看涨期权的出售价格将随股票价格而直接变化 (在图中实线的上方) 。当到期日临近，看涨期权价格将向

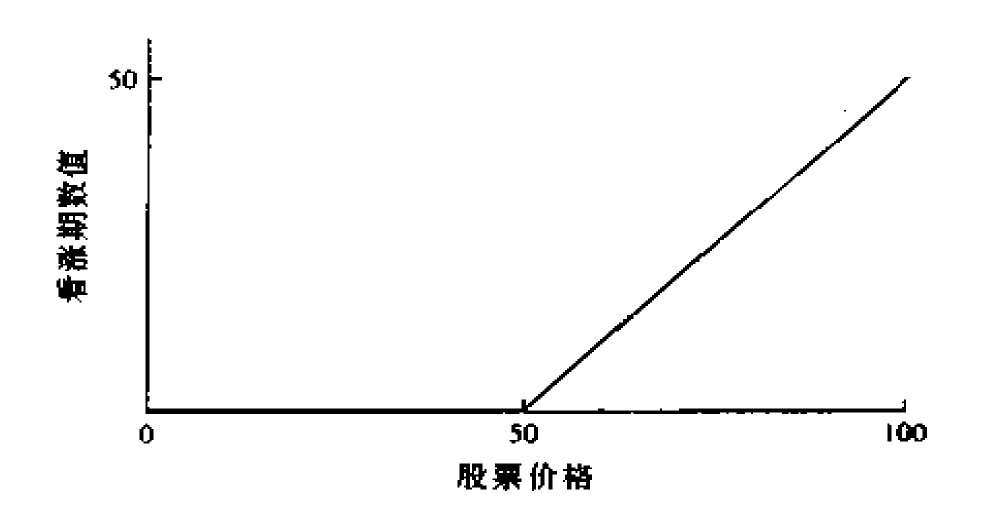


图 10.2　例示看涨期权在到期日之值

实线靠近，而在到期日则到达实线，其值对应于股票在该时的价格。例如，若在到期日股票价格为 $60, 则看涨期权价值为 $10 。若股票价格为 $40, 则此看涨期权毫无价值。

其次考虑一项看跌期权，其持有人有权在到期日以 $50 出售一份相关的股票。图 10.3 给出了此种看跌期权在到期日之值的图示。

在到期日之前，此看跌期权的出售价格将与股票价格逆向而变化 (在实线上方) 。当到期日临近，看跌期权价格将向实线靠近，而在到期日到达实线，其值对应于股票当时的价格。例如，若在到期日股票价格为 $40, 则看跌期权价值为 $10 。若股票价格为 $60, 则看跌期权毫无价值。

如 8.8 节所述，投资人可以买进或卖出期权。这样，如果一位投资者认为证券价格大概会上涨，则可以买进看涨期权或出售看跌期权，反过来，如果投资者认为证券价格大概会下跌，则应买进看跌期权或出售看涨期权。

可以证明，对一种股票有同样实价的看跌期权和看涨期权的价值是相互关联的。图 10.4 显示了买进一份图 10.2 和图 10.3 所

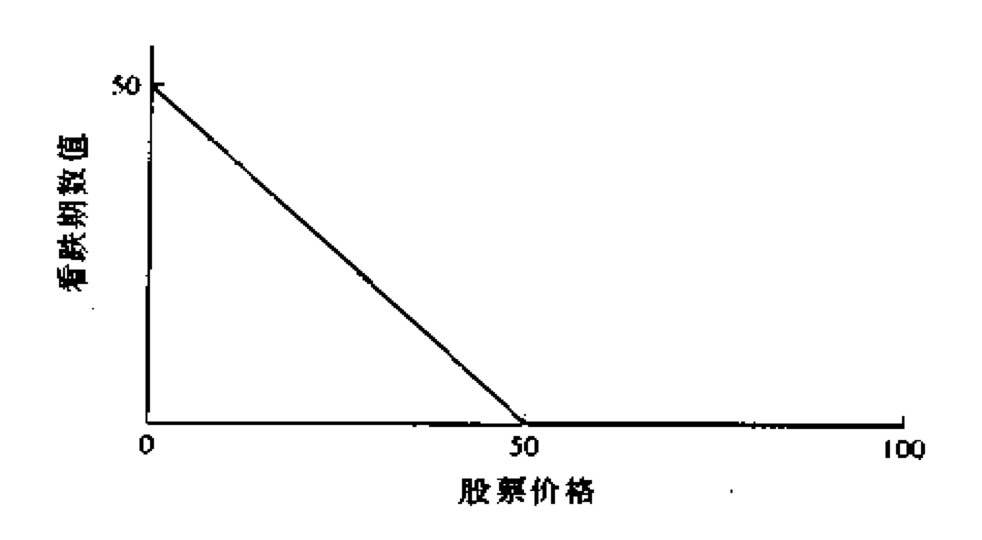


图 10.3　例示看跌期权在到期日之值

示股票的结果：

现在来考虑，如果投资者购买了一份股票及一份看跌期权，将会发生什么情况。在到期日的报偿应是图 10.3 与图 10.4 的和，并展示于图 10.5 上。然而图 10.5 与图 10.2 其实是一样的，只是对所有点其值都高 \$50 。

所以，如果我们另外存放足够多的钱在到期日积累到 \$50, 并且还购进一份看涨期权的话，则这样一笔业务与上面所谈的第一笔业务其实是等价的。一般说来，应有下述关系：

$$P + S = C + v^n E, \tag{10.36}$$

其中

P ＝ 看跌期权的值,

C ＝ 看涨期权的值,

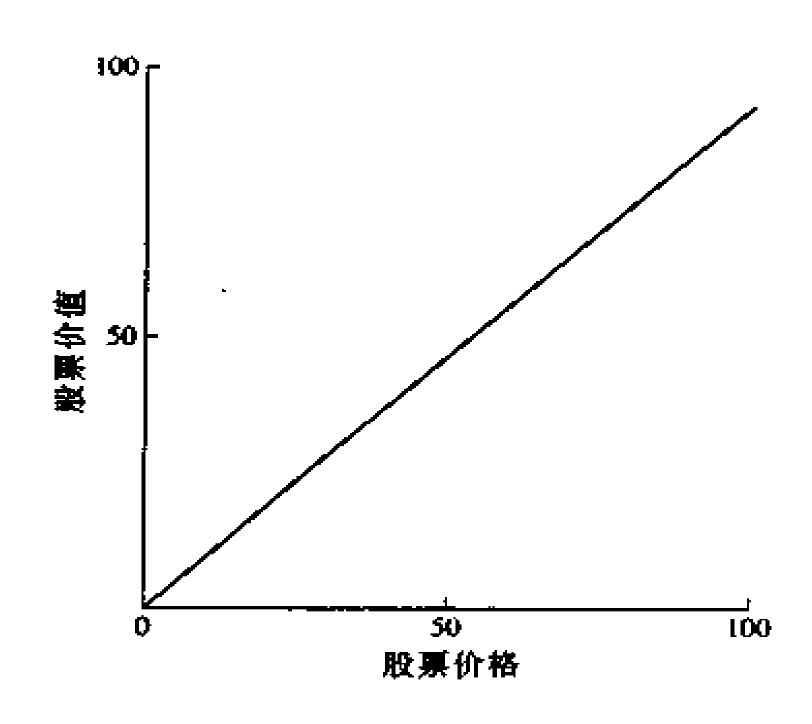


图 10.4　基础股票的价值

$$S = \text{当前股票价格},$$
$$E = \text{履行 (成交) 价格},$$
$$n = \text{至到期日为止所余时间}.$$

请读者注意符号 C 在第七章中曾用来表示债券的偿还值， P 曾用来表示债券价格。符号 S 在第八章 8.5 节中曾用来表示残值。

(10.36) 式中的关系称为*看跌期权—看涨期权平价*。(10.36) 式中 v^n 的利率是无息票国库券收益曲线中 n 个时期的无风险利率。因此，如果我们已知以下四项中的三项，则第四项的值也就决定了。这四项是： (1) 股票 (2) 看跌期权 (3) 看涨期权及 (4) 无息票国库券。如果市场上这四者的价格不符合 (10.36), 那就有机会套利以赚取利润。但现代金融理论断言，在高效的市场上无

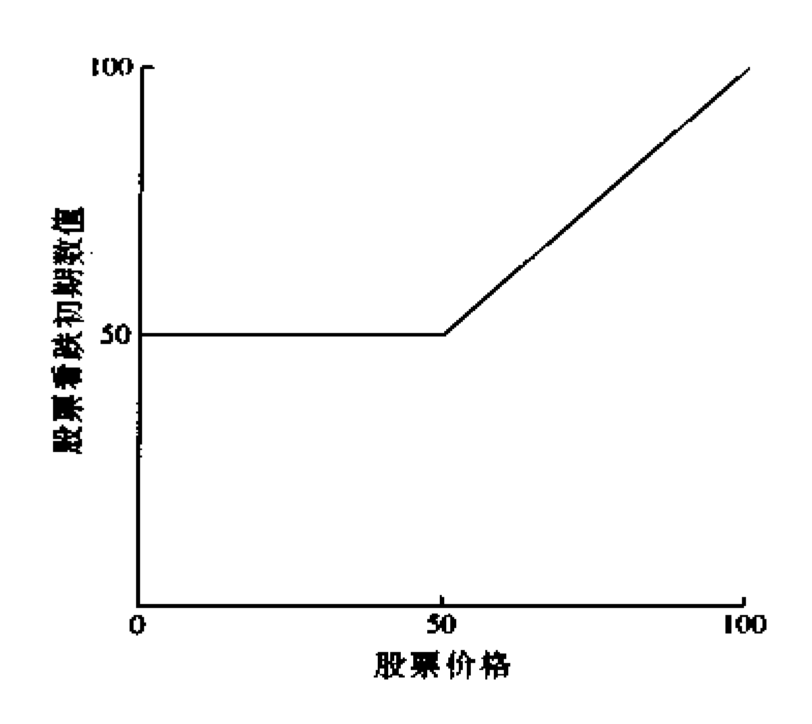


图 10.5　一份股票与一份看跌期权组合在到期日的价值

风险套利的机会是稍纵即逝的。

期权给发展套期保值战略以减少投资风险提供了很大的弹性。因此，在现代金融管理中了解期权的估价是很重要的。

期权开始时是针对普通股而创立的。但现在它们已这样普及以致在债券，未来利率，货物及外币交换中都有期权。

不仅如此，许多证券还有*嵌入期权*，这并不是一种单独的金融手段，而是一套金融手段中的一部分。

例如，考虑一种非通知偿还债券和另一种其他方面都相同的通知偿还债券的关系。非通知偿还债券的出售价会高于通知偿还债券，因为债券购买者宁愿多花一点钱去买一种不会在某个不确

定的日期提早通知偿还的债券。因此有下列关系：

$$B^{nc} = B^c + C, \tag{10.37}$$

其中

B^{nc} = 非通知偿还债券的值,
B^c = 通知偿还债券的值,
C = 看涨期权的值.

当投资者购买通知偿还债券时，他们本质上是在购买非通知偿还债券，并同时出售看涨期权给债券发行人。

嵌入期权的另一个例子是 8.8 节中叙述过的抵押支持证券 (MBS) 和担保抵押债券 (CMO) 的预付款。这些在概念上与通知偿还债券很类似，因为二者都给借款人以早于原定日程偿还贷款的权利。

求期权值的一种普遍使用的方法是 Black —Scholes 期权估价模型。此种模型在本书末所列举的 F. Black 和 M. Scholes 的一篇论文 (1973) 中首次提出。

Black —Scholes 期权估价模型建立了欧洲看涨期权的价格公式。读者回顾一下 8.8 节中会记得，欧洲期权是只能在到期日履行的。对于欧洲看涨期权值的 Black —Scholes 公式为

$$C = S \cdot N(d_1) - Ee^{-\delta n} N(d_2), \tag{10.38}$$

其中

C = 欧洲看涨期权的值,
S = 当前股票值 (或其他基本资产的当前值),
E = 履行 (成交) 价格,
δ = n 个时期的无风险利息效力,
n = 至到期日为止余留的时间,

$$N = \text{标准正态分布的累积分布函数},$$

$$d_1 = \frac{\log_e(S/E) + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)n}{\sigma\sqrt{n}}, \tag{10.39a}$$

$$d_2 = \frac{\log_e(S/E) + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)n}{\sigma\sqrt{n}}, \tag{10.39b}$$

$$\sigma = \text{股票或其他基本资产利息效力的标准差}.$$

很有趣， Black —Scholes 公式是基于一个假设，即 $1 + i_t$ 服从对数正态分布，这恰如 10.2 节和 10.3 节所叙述。这样，刚才定义的 σ 就是 (10.18) 式定义的 $\delta_{[t]}$ 的标准差。

公式 (10.38) 也假设基础股票或其他资产在到期日前不支付分红。 (10.38) 式的推导过程很长，在附录VII中给出。

因为美国看涨期权既可在到期日履行也可在此之前的任何日期履行，所以看起来它的价值应大于欧洲看涨期权。然而，对于一种不分红的股票，早期履行决不是最优的选择。这一点从图 10.2 可以见到，因为看涨期权在到期日以前是以实线上方的价格出售的，但对于一种分红的股票，早期履行可能是最优的，因可从分红中得到收入。

求欧洲看跌期权值的对应公式是

$$P = Ee^{\delta n}[1 - N(d_2)] - S[1 - N(d_1)], \tag{10.40}$$

其中 P 是看跌期权的值，而其余符号的意义与 (10.38) 式中相同。令人惊奇的是，美国看跌期权的值大于欧洲看跌期权的值。甚至在基础股票不分红的情况下，早期履行也可以是最优的。一方面，长期看跌期权可能比短期看跌期权更有价值，这是因为可以有更长的时间让基础股票价格向喜欢的方向移动。但另一方面，短期看跌期权也可能比长期看跌期权更有价值，这是由于金钱的时间值。未来的日期越远，在未来以喜欢的价格购买某些东西的

权利价值越低。因此，看跌期权的早期履行可能是最优的，故美国看跌期权比欧洲看跌期权更值钱。

用经验数据对 Black —Scholes 公式进行测试的结果表明，该公式在某些条件下是合理的。但在以下情形会有较大的误差：

1. 当履行价格 E 与当前市场价格 S 相差很大时。

2. 对于那种其波动远高于或远低于平均的证券，即 σ 很大或很小。

3. 若到期日在很远的未来，即 n 很大。

例 10.9　用 Black —Scholes 公式求一种欧洲看涨期权的值，该期权在 1 年后到期，它对当前售价为 \$90 的股票有 \$100 的履行价格。此股票连续收益率的标准差为 .3, 而无风险利息效力为 10% 。

用 (10.39a) 和 (10.39b) 可得

$$d_1 = \frac{\log_e(90/100) + (0.1 + 0.09/2)(1)}{0.3(1)} = 0.132$$

及

$$d_2 = \frac{\log_e(90/100) + (0.1 - 0.09/2)(1)}{0.3(1)} = -0.168.$$

由累积正态分布表有

$$N(0.132) = 0.5525$$

及

$$N(-0.168) = 0.4333.$$

再代入 (10.38) 式，就得

$$C = (90)(0.5525) - (100)(e^{-0.1})(0.4333) = \$10.52.$$

习 题

§10.2 独立利率

1. 推导公式 (10.9) 。

2. 推导公式 (10.11) 。

3. 投资 \$1000, 为期 3 年。第 1 年实质利率为 8% 。第 2 年实质利率有相等的可能性为比第 1 年高 1% 或低 1%, 第 3 年实质利率有相等的可能性为比第 2 年高 1% 或低 1% 。

a) 求 3 年内每 1 年的平均利率。

b) 求 3 年内每 1 年利率的标准差。

c) 求 3 年之末的最大可能积累。

d) 求 3 年之末的最小可能积累。

e) 求 3 年之末按平均利率的积累。

f) 求 3 年之末积累的平均值。

g) 求 3 年之末积累的标准差。

4. 设 i_t 为按例 10.1 分布的实质利率，即对 $t = 1, 2, 3$ 在区间 $[0.07, 0.09]$ 上的均匀分布。

a) 求 i 使 $E[(1+i_t)^{-1}] = (1+i)^{-1}$ 。

b) 求 3 年之末支付 1 的现时值的平均值。

c) 求 k 使 $E[(1+i_t)^{-2}] = (1+k)^{-1}$ 。

d) 求 (b) 中现时值的标准差。

5. 对于在 3 年内每年之末付款 1 的现时值，重做习题 4(b) 和 4(d) 。

6. 假设 $1+i_t$ 服从具有 $\mu = 0.06$ 及 $\sigma^2 = 0.0001$ 的对数正态分布，求以下各项的平均值和标准差：

a) $a(10)$ 。

b) $\ddot{s}_{\overline{10}|}$ 。

c) $a^{-1}(10)$ 。

d) $a_{\overline{10}|}$ 。

§10.3　相关利率

7. 对例 10.7 中给出的数据，估计 $t=6,7,8$ 的 $\delta_{[t]}$，其中假设未来真值等于估计值。

8. a) 证明若 $k_2=0$, 公式 (10.25) 简化为 (10.22) 。

b) 证明若 $k_2=0$, 公式 (10.26) 简化为 (10.23) 。

9. 对于例 10.7 中基于 $z=1,2,3,4$ 数据的 AR(2) 过程，假定其误差服从平均值 =0 的正态分布，且设母体方差等于样本方差，试估计 σ^2 。

10. 假设例 10.7 中 AR(2) 过程的 σ^2 值实际等于 .0002,

a) 求 $\mathrm{var}[\delta_{[t]}]$ 。

b) 求 $\mathrm{cov}[\delta_{[t]},\delta_{[t+2]}]$ 。

11. 假设 $\delta_{[t]}$ 为正态分布且遵循 AR(1) 过程。给出下列值：

z	$\delta_{[z]}$ 真值	$\delta_{[z]}$ 估计值
1	0.100	0.104
2	0.105	0.096
3	0.095	0.100

a) 求 $\delta_{[4]}^{E}$ 。

b) 若 $\mathrm{var}[\delta_{[t]}]=0.0001$, 求 $\mathrm{cov}[\delta_{[3]},\delta_{[6]}]$ 。

12. 一项投资基金在过去的 1 年中有 6% 的实质收益率。今后两年中每 1 年此项基金的收益率 i_t 有相等的可能性为：

$$\begin{aligned}0.02 &+ k(i_{t-1}-0.06),\\ 0.06 &+ k(i_{t-1}-0.06),\\ 0.10 &+ k(i_{t-1}-0.06).\end{aligned}$$

a) 证明

$$E[a(2)]=(1.06)^2+\frac{1}{3}(0.0032)k.$$

b) 证明

$$\text{var}[a(2)] = \frac{1}{9}(0.02158336 + 0.02157312k + 0.01079168k^2).$$

§10.4　资产估价模型

13. 利用表 10.1 和 10.2 中的数据，为下列各项计算风险的市场价格：

a) 普通股。

b) 共同债券。

c) 短期国库券。

14. 对于例 10.8 中的普通股，假定此股票具有高于平均的市场风险，求它在 1 年之末价格期望值增加的幅度。

15. a) 对于例 10.8 中的普通股，如果现时值按资本资产估价模型所产生的利率计算，试用 7.10 节中建立的分红贴现模型去求其隐含的年度分红增长率。

b) 这种隐含的年度分红增长率是否和例 10.8 一致？

c) 假设实际的无风险利率为 3%, 求年度分红增长率对年度通胀率的过剩量。

16. 一家商业单位决定用资本资产估价模型去评估两个项目 A 和 B 。项目 A 有正常风险，$\beta = 1$; 而项目 B 有较高风险，$\beta = 2$ 。可以期望两个项目在 1 年之末获得同样金额的收益，而在此之后则无所得。无风险利率为 5%, 而市场风险上溢为 7% 。如将两个项目组合为一个项目，求组合项目的 β 值。

17. 股票 A 有 $\beta = 0.5$, 而投资者期望它有 7% 的收益率。股票 B 有 $\beta = 1.5$, 而投资者期望它有 15% 的收益率。

a) 求无风险利率。

b) 设市场组合与股票 A 和 B 有相等的相关系数，求 σ_A/σ_B 。

18. 一项投资按设计在 1 年之末可回收 \$110, 在 2 年之末又可回收 \$121 。无风险利率为 5%, 市场风险上溢为 10%, 此项投资的 β 值为 .5 。

a) 求此项投资按风险调整利率的现时值。

b) 求在每年之末按确定性的等价回收金额。

§10.5 期权估价模型

19. 试从代数上校核：一项由 (10.38) 式给出的看涨期权的 Black —Scholes 公式和一项由 (10.40) 给出的看跌期权的 Black —Scholes 公式满足看跌期权 —看涨期权平价。

20. 一项欧洲看跌期权与例 10.9 中的欧洲看涨期权有同样的到期日和履行价，求其值。

21. 对于看涨期权的值求下列极限值：

a) $S=0$ 。

b) S 相对于 E 非常大。

c) $E=0$ 。

d) E 相对于 S 非常大。

e) $n=0$ 。

f) n 非常大。

22. 为了展示 Black —Scholes 公式的灵敏性，重做例 10.9, 但对下列参数一一改变，而同时保持其他参数为常数。(注意：为做习题 22, 23, 24, 需要使用累积正态分布值表，该表本书中不提供。)

a) $S=80$ 。

b) $S=100$ 。

c) $\delta=0.05$ 。

d) $\delta=0.15$ 。

e) $\sigma=0.15$ 。

f) $\sigma=0.45$ 。

g) $n=0.5$ 。

h) $n=1.5$ 。

23. Black —Scholes 公式也可用于支付红利的股票，只要从 S 中扣除在到期前支付的红利的现时值，然后按正常形式使用此

公式。如果例 10.9 中的股票在 1 年之末付 \$3.60 的红利，重做例 10.9 。

24. 债券 A 是一种票面值 \$100 的两年期共同债券，按票面值到期偿还，附有 \$10 的年度息票，购买此债券可获 10% 的实质收益率。债券 B 是一种在其他方面均与 A 相同的债券，但它可在 1 年之末以 \$102 通知偿还。请用 Black —Scholes 公式估计债券 B 的价格。假设无风险利率为 9%, 并用表 10.2 估计共同债券收益率的波动性。

附 录 I

复利函数表

本表中按以下利率：0.5%, 1%, 1.5%, 2%, 2.5%, 3%, 3.5%, 4%, 4.5%. 5%, 6%, 7%, 8%, 9%, 10%, 12% 给出 ν^n, $(1+i)^n$, $a_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$, $1/s_{\overline{n}|}$ 及一些常数的值。

按 0.5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.005000
$i^{(2)}$	0.004994
$i^{(4)}$	0.004991
$i^{(12)}$	0.004989
δ	0.004988
d	0.004975
$d^{(2)}$	0.004981
$d^{(4)}$	0.004984
$d^{(12)}$	0.004987
δ	0.004988
v	0.995025
$v^{1/2}$	0.997509
$v^{1/4}$	0.998754
$v^{1/12}$	0.999584
$1+i$	1.005000
$(1+i)^{1/2}$	1.002497
$(1+i)^{1/4}$	1.001248
$(1+i)^{1/12}$	1.000416
$i/i^{(2)}$	1.001248

常数	
$i/i^{(4)}$	1.001873
$i/i^{(12)}$	1.002290
i/δ	1.002498
$i/d^{(2)}$	1.003748
$i/d^{(4)}$	1.003123
$i/d^{(12)}$	1.002706
i/δ	1.002498

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.99502	1.00500	0.9950	1.000	1.000000
2	0.99007	1.01002	1.9851	2.0050	0.498753
3	0.98515	1.01508	2.9702	3.0150	0.331672
4	0.98025	1.02015	3.9505	4.0301	0.248133
5	0.97537	1.02525	4.9259	5.0503	0.198010
6	0.97052	1.03038	5.8964	6.0755	0.164595
7	0.96569	1.03553	6.8621	7.1059	0.140729
8	0.96089	1.04071	7.8230	8.1414	0.122829
9	0.95610	1.04591	8.7791	9.1821	0.108907
10	0.95135	1.05114	9.7304	10.2280	0.097771
11	0.94661	1.05640	10.6770	11.2792	0.088659
12	0.94191	1.06168	11.6189	12.3356	0.081066
13	0.93722	1.06699	12.5562	13.3972	0.074642
14	0.93256	1.07232	13.4887	14.4642	0.069136
15	0.92792	1.07768	14.4166	15.5365	0.064364
16	0.92330	1.08307	15.3399	16.6142	0.060189
17	0.91871	1.08849	16.2586	17.6973	0.056506
18	0.91414	1.09393	17.1728	18.7858	0.053232
19	0.90959	1.09940	18.0824	19.8797	0.050303
20	0.90506	1.10490	18.9874	20.9791	0.047666
21	0.90056	1.11042	19.8880	22.0840	0.045282
22	0.89608	1.11597	20.7841	23.1944	0.043114
23	0.89162	1.12155	21.6757	24.3104	0.041135
24	0.88719	1.12716	22.5629	25.4320	0.039321
25	0.88277	1.13280	23.4456	26.5591	0.037652
26	0.87838	1.13846	24.3240	27.6919	0.036112
27	0.87401	1.14415	25.1980	28.8304	0.034686
28	0.86966	1.14987	26.0677	29.9745	0.033362
29	0.86533	1.15562	26.9330	31.1244	0.032129
30	0.86103	1.16140	27.7941	32.2800	0.030979

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
31	0.85675	1.16721	28.6508	33.4414	0.029903
32	0.85248	1.17304	29.5033	34.6086	0.028895
33	0.84824	1.17891	30.3515	35.7817	0.027947
34	0.84402	1.18480	31.1955	36.9606	0.027056
35	0.83982	1.19073	32.0354	38.1454	0.026215
36	0.83564	1.19668	32.8710	39.3361	0.025422
37	0.83149	1.20266	33.7025	40.5328	0.024671
38	0.82735	1.20868	34.5299	41.7354	0.023960
39	0.82323	1.21472	35.3531	42.9441	0.023286
40	0.81914	1.22079	36.1722	44.1588	0.022646
41	0.81506	1.22690	36.9873	45.3796	0.022036
42	0.81101	1.23303	37.7983	46.6065	0.021456
43	0.80697	1.23920	38.6053	47.8396	0.020903
44	0.80296	1.24539	39.4082	49.0788	0.020375
45	0.79896	1.25162	40.2072	50.3242	0.019871
46	0.79499	1.25788	41.0022	51.5758	0.019389
47	0.79103	1.26417	41.7932	52.8337	0.018927
48	0.78710	1.27049	42.5803	54.0978	0.018485
49	0.78318	1.27684	43.3635	55.3683	0.018061
50	0.77929	1.28323	44.1428	56.6452	0.017654

按 1% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.010000
$i^{(2)}$	0.009975
$i^{(4)}$	0.009963
$i^{(12)}$	0.009954
δ	0.009950
d	0.009901
$d^{(2)}$	0.009926
$d^{(4)}$	0.009938
$d^{(12)}$	0.009946
δ	0.009950
v	0.990099
$v^{1/2}$	0.995037
$v^{1/4}$	0.997516
$v^{1/12}$	0.999171

常数	
$1+i$	1.010000
$(1+i)^{1/2}$	1.004988
$(1+i)^{1/4}$	1.002491
$(1+i)^{1/12}$	1.000830
$i/i^{(2)}$	1.002494
$i/i^{(4)}$	1.003742
$i/i^{(12)}$	1.004575
i/δ	1.004992
$i/d^{(2)}$	1.007494
$i/d^{(4)}$	1.006242
$i/d^{(12)}$	1.005408
i/δ	1.004992

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.99010	1.01000	0.9901	1.0000	1.00000
2	0.98030	1.02010	1.9704	2.0100	0.497512
3	0.97059	1.03030	2.9410	3.0301	0.330022
4	0.96098	1.04060	3.9020	4.0604	0.246281
5	0.95147	1.05101	4.8534	5.1010	0.196040
6	0.94205	1.06152	5.7955	6.1520	0.162548
7	0.93272	1.07214	6.7282	7.2135	0.138628
8	0.92348	1.08286	7.6517	8.2857	0.120690
9	0.91434	1.09369	8.5660	9.3685	0.106740
10	0.90529	1.10462	9.4713	10.4622	0.095582
11	0.89632	1.11567	10.3676	11.5668	0.086454
12	0.88745	1.12683	11.2551	12.6825	0.078849
13	0.87866	1.13809	12.1337	13.8093	0.072415
14	0.86996	1.14947	13.0037	14.9474	0.066901
15	0.86135	1.16097	13.8651	16.0969	0.062124
16	0.85282	1.17258	14.7179	17.2579	0.057945
17	0.84438	1.18430	15.5623	18.4304	0.054258
18	0.83602	1.19615	16.3983	19.6147	0.050982
19	0.82774	1.20811	17.2260	20.8109	0.048052
20	0.81954	1.22019	18.0456	22.0190	0.045415
21	0.81143	1.23239	18.8570	23.2392	0.043031
22	0.80340	1.24472	19.6604	24.4716	0.040864
23	0.79544	1.25716	20.4558	25.7163	0.038886
24	0.78757	1.26973	21.2434	26.9735	0.037073
25	0.77977	1.28243	22.0232	28.2432	0.035407

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rfloor}$	$s_{\overline{n}\rfloor}$	$1/s_{\overline{n}\rfloor}$
26	0.77205	1.29526	22.7952	29.5256	0.033869
27	0.76440	1.30821	23.5596	30.8209	0.032446
28	0.75684	1.32129	24.3164	32.1291	0.031124
29	0.74934	1.33450	25.0658	33.4504	0.029895
30	0.74192	1.34785	25.8077	34.7849	0.028748
31	0.73458	1.36133	26.5423	36.1327	0.027676
32	0.72730	1.37494	27.2696	37.4941	0.026671
33	0.72010	1.38869	27.9897	38.8690	0.025727
34	0.71297	1.40258	28.7027	40.2577	0.024840
35	0.70591	1.41660	29.4086	41.6603	0.024004
36	0.69892	1.43077	30.1075	43.0769	0.023214
37	0.69200	1.44508	30.7995	44.5076	0.022468
38	0.68515	1.45953	31.4847	45.9527	0.021761
39	0.67837	1.47412	32.1630	47.4123	0.021092
40	0.67165	1.48886	32.8347	48.8864	0.020456
41	0.66500	1.50375	33.4997	50.3752	0.019851
42	0.65842	1.51879	34.1581	51.8790	0.019276
43	0.65190	1.53398	34.8100	53.3978	0.018727
44	0.64545	1.54932	35.4555	54.9318	0.018204
45	0.63905	1.56481	36.0945	56.4811	0.017705
46	0.63273	1.58046	36.7272	58.0459	0.017228
47	0.62646	1.59626	37.3537	59.6263	0.016771
48	0.62026	1.61223	37.9740	61.2226	0.016334
49	0.61412	1.62835	38.5881	62.8348	0.015915
50	0.60804	1.64463	39.1961	64.4632	0.015513

按 1.5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.015000
$i^{(2)}$	0.014944
$i^{(4)}$	0.014916
$i^{(12)}$	0.014898
δ	0.014889
d	0.014778
$d^{(2)}$	0.014833
$d^{(4)}$	0.014861
$d^{(12)}$	0.014879
δ	0.014889

常数	
函数	值
v	0.985222
$v^{1/2}$	0.992583
$v^{1/4}$	0.996285
$v^{1/12}$	0.998760
$1+i$	1.015000
$(1+i)^{1/2}$	1.007472
$(1+i)^{1/4}$	1.003729
$(1+i)^{1/12}$	1.001241
$i/i^{(2)}$	1.003736
$i/i^{(4)}$	1.005608
$i/i^{(12)}$	1.006857
i/δ	1.007481
$i/d^{(2)}$	1.011236
$i/d^{(4)}$	1.009358
$i/d^{(12)}$	1.008107
i/δ	1.007481

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.98522	1.01500	0.9852	1.000	1.000000
2	0.97066	1.03022	1.9559	2.0150	0.496278
3	0.95632	1.04568	2.9122	3.0452	0.328383
4	0.94218	1.06136	3.8544	4.0909	0.244445
5	0.92826	1.07728	4.7826	5.1523	0.194089
6	0.91454	1.09344	5.6972	6.2296	0.160525
7	0.90103	1.10984	6.5982	7.3230	0.136556
8	0.88771	1.12649	7.4859	8.4328	0.118584
9	0.87459	1.14339	8.3605	9.5593	0.104610
10	0.86167	1.16054	9.2222	10.7027	0.093434
11	0.84893	1.17795	10.0711	11.8633	0.084294
12	0.83639	1.19562	10.9075	13.0412	0.076680
13	0.82403	1.21355	11.7315	14.2368	0.070240
14	0.81185	1.23176	12.5434	15.4504	0.064723
15	0.79985	1.25023	13.3432	16.6821	0.059944
16	0.78803	1.26899	14.1313	17.9324	0.055765
17	0.77639	1.28802	14.9076	19.2014	0.052080
18	0.76491	1.30734	15.6726	20.4894	0.048806

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
19	0.75361	1.32695	16.4262	21.7967	0.045878
20	0.74247	1.34686	17.1686	23.1237	0.043246
21	0.73150	1.36706	17.9001	24.4705	0.040865
22	0.72069	1.38756	18.6208	25.8376	0.038703
23	0.71004	1.40838	19.3309	27.2251	0.036731
24	0.69954	1.42950	20.0304	28.6335	0.034924
25	0.68921	1.45095	20.7196	30.0630	0.033263
26	0.67902	1.47271	21.3986	31.5140	0.031732
27	0.66899	1.49480	22.0676	32.9867	0.030315
28	0.65910	1.51722	22.7267	34.4815	0.029001
29	0.64936	1.53998	23.3761	35.9987	0.027779
30	0.63976	1.56308	24.0158	37.5387	0.026639
31	0.63031	1.58653	24.6461	39.1018	0.025574
32	0.62099	1.61032	25.2671	40.6883	0.024577
33	0.61182	1.63448	25.8790	42.2986	0.023641
34	0.60277	1.65900	26.4817	43.9331	0.022762
35	0.59387	1.68388	27.0756	45.5921	0.021934
36	0.58509	1.70914	27.6607	47.2760	0.021152
37	0.57644	1.73478	28.2371	48.9851	0.020414
38	0.56792	1.76080	28.8051	50.7199	0.019716
39	0.55953	1.78721	29.3646	52.4807	0.019055
40	0.55126	1.81402	29.9158	54.2679	0.018427
41	0.54312	1.84123	30.4590	56.0819	0.017831
42	0.53509	1.86885	30.9941	57.9231	0.017264
43	0.52718	1.89688	31.5212	59.7920	0.016725
44	0.51939	1.92533	32.0406	61.6889	0.016210
45	0.51171	1.95421	32.5523	63.6142	0.015720
46	0.50415	1.98353	33.0565	65.5684	0.015251
47	0.49670	2.01328	33.5532	67.5519	0.014803
48	0.48936	2.04348	34.0426	69.5652	0.014375
49	0.48213	2.07413	34.5247	71.6087	0.013965
50	0.47500	2.10524	34.9997	73.6828	0.013572

按 2% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.020000
$i^{(2)}$	0.019901
$i^{(4)}$	0.019852

常数	
$i^{(12)}$	0.019819
δ	0.019803
d	0.019608
$d^{(2)}$	0.019705
$d^{(4)}$	0.019754
$d^{(12)}$	0.019786
δ	0.019803
v	0.980392
$v^{1/2}$	0.990148
$v^{1/4}$	0.995062
$v^{1/12}$	0.998351
$1+i$	1.020000
$(1+i)^{1/2}$	1.009950
$(1+i)^{1/4}$	1.004963
$(1+i)^{1/12}$	1.001652
$i/i^{(2)}$	1.004975
$i/i^{(4)}$	1.007469
$i/i^{(12)}$	1.009134
i/δ	1.009967
$i/d^{(2)}$	1.014975
$i/d^{(4)}$	1.012469
$i/d^{(12)}$	1.010801
i/δ	1.009967

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.98039	1.02000	0.9804	1.0000	1.00000
2	0.96117	1.04040	1.9416	2.0200	0.495050
3	0.94232	1.06121	2.8839	3.0604	0.326755
4	0.92385	1.08243	3.8077	4.1216	0.242624
5	0.90573	1.10408	4.7135	5.2040	0.192158
6	0.88797	1.12616	5.6014	6.3081	0.158526
7	0.87056	1.14869	6.4720	7.4343	0.134512
8	0.85349	1.17166	7.3255	8.5830	0.116510
9	0.83676	1.19509	8.1622	9.7546	0.102515
10	0.82035	1.21899	8.9826	10.9497	0.091327

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
11	0.80426	1.24337	9.7868	12.1687	0.082178
12	0.78849	1.26824	10.5753	13.4121	0.074560
13	0.77303	1.29361	11.3484	14.6803	0.068118
14	0.75788	1.31948	12.1062	15.9739	0.062602
15	0.74301	1.34587	12.8493	17.2934	0.057825
16	0.72845	1.37279	13.5777	18.6393	0.053650
17	0.71416	1.40024	14.2919	20.0121	0.049970
18	0.70016	1.42825	14.9920	21.4123	0.046702
19	0.68643	1.45681	15.6785	22.8406	0.043782
20	0.67297	1.48595	16.3514	24.2974	0.041157
21	0.65978	1.51567	17.0112	25.7833	0.038785
22	0.64684	1.54598	17.6580	27.2990	0.036631
23	0.63416	1.57690	18.2922	28.8450	0.034668
24	0.62172	1.60844	18.9139	30.4219	0.032871
25	0.60953	1.64061	19.5235	32.0303	0.031220
26	0.59758	1.67342	20.1210	33.6709	0.029699
27	0.58586	1.70689	20.7069	35.3443	0.028293
28	0.57437	1.74102	21.2813	37.0512	0.026990
29	0.56311	1.77584	21.8444	38.7922	0.025778
30	0.55207	1.81136	22.3965	40.5681	0.024650
31	0.54125	1.84759	22.9377	42.3794	0.023596
32	0.53063	1.88454	23.4683	44.2270	0.022611
33	0.52023	1.92223	23.9886	46.1116	0.021687
34	0.51003	1.96068	24.4986	48.0338	0.020819
35	0.50003	1.99989	24.9986	49.9945	0.020002
36	0.49022	2.03989	25.4888	51.9944	0.019233
37	0.48061	2.08069	25.9695	54.0343	0.018507
38	0.47119	2.12230	26.4406	56.1149	0.017821
39	0.46195	2.16474	26.9026	58.2372	0.017171
40	0.45289	2.20804	27.3555	60.4020	0.016556
41	0.44401	2.25220	27.7995	62.6100	0.015972
42	0.43530	2.29724	28.2348	64.8622	0.015417
43	0.42677	2.34319	28.6616	67.1595	0.014890
44	0.41840	2.39005	29.0800	69.5027	0.014388
45	0.41020	2.43785	29.4902	71.8927	0.013910
46	0.40215	2.48661	29.8923	74.3306	0.013453
47	0.39427	2.53634	30.2866	76.8172	0.013018
48	0.38654	2.58707	30.6731	79.3535	0.012602
49	0.37896	2.63881	31.0521	81.9406	0.012204
50	0.37153	2.69159	31.4236	84.5794	0.011823

按 2.5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.025000
$i^{(2)}$	0.024846
$i^{(4)}$	0.024769
$i^{(12)}$	0.024718
δ	0.024693
d	0.024390
$d^{(2)}$	0.024541
$d^{(4)}$	0.024617
$d^{(12)}$	0.024667
δ	0.024693
v	0.975610
$v^{1/2}$	0.987730
$v^{1/4}$	0.993846
$v^{1/12}$	0.997944
$1+i$	1.025000
$(1+i)^{1/2}$	1.012423
$(1+i)^{1/4}$	1.006192
$(1+i)^{1/12}$	1.002060
$i/i^{(2)}$	1.006211
$i/i^{(4)}$	1.009327
$i/i^{(12)}$	1.011407
i/δ	1.012449
$i/d^{(2)}$	1.018711
$i/d^{(4)}$	1.015577
$i/d^{(12)}$	1.013491
i/δ	1.012449

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.97561	1.02500	0.9756	1.000	1.000000
2	0.95181	1.05062	1.9274	2.0250	0.493827
3	0.92860	1.07689	2.8560	3.0756	0.325137
4	0.90595	1.10381	3.7620	4.1525	0.240818
5	0.88385	1.13141	4.6458	5.2563	0.190247

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
6	0.86230	1.15969	5.5081	6.3877	0.156550
7	0.84127	1.18869	6.3494	7.5474	0.132495
8	0.82075	1.21840	7.1701	8.7361	0.114467
9	0.80073	1.24886	7.9709	9.9545	0.100457
10	0.78120	1.28008	8.7521	11.2034	0.089259
11	0.76214	1.31209	9.5142	12.4835	0.080106
12	0.74356	1.34489	10.2578	13.7956	0.072487
13	0.72542	1.37851	10.9832	15.1404	0.066048
14	0.70773	1.41297	11.6909	16.5190	0.060537
15	0.69047	1.44830	12.3814	17.9319	0.055766
16	0.67362	1.48451	13.0550	19.3802	0.051599
17	0.65720	1.52162	13.7122	20.8647	0.047928
18	0.64117	1.55966	14.3534	22.3863	0.044670
19	0.62553	1.59865	14.9789	23.9460	0.041761
20	0.61027	1.63862	15.5892	25.5447	0.039147
21	0.59539	1.67958	16.1845	27.1833	0.036787
22	0.58086	1.72157	16.7654	28.8629	0.034647
23	0.56670	1.76461	17.3321	30.5844	0.032696
24	0.55288	1.80873	17.8850	32.3490	0.030913
25	0.53939	1.85394	18.4244	34.1578	0.029276
26	0.52623	1.90029	18.9506	36.0117	0.027769
27	0.51340	1.94780	19.4640	37.9120	0.026377
28	0.50088	1.99650	19.9649	39.8598	0.025088
29	0.48866	2.04641	20.4535	41.8563	0.023891
30	0.47674	2.09757	20.9303	43.9027	0.022778
31	0.46511	2.15001	21.3954	46.0003	0.021739
32	0.45377	2.20376	21.8492	48.1503	0.020768
33	0.44270	2.25885	22.2919	50.3540	0.019859
34	0.43191	2.31532	22.7238	52.6129	0.019007
35	0.42137	2.37321	23.1452	54.9282	0.018206
36	0.41109	2.43254	23.5563	57.3014	0.017452
37	0.40107	2.49335	23.9573	59.7339	0.016741
38	0.39128	2.55568	24.3486	62.2273	0.016070
39	0.38174	2.61957	24.7303	64.7830	0.015436
40	0.37243	2.68506	25.1028	67.4026	0.014836
41	0.36335	2.75219	25.4661	70.0876	0.014268
42	0.35448	2.82100	25.8206	72.8398	0.013729
43	0.34584	2.89152	26.1664	75.6608	0.013217
44	0.33740	2.96381	26.5038	78.5523	0.012730
45	0.32917	3.03790	26.8330	81.5161	0.012268
46	0.32115	3.11385	27.1542	84.5540	0.011827

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
47	0.31331	3.19170	27.4675	87.6679	0.011407
48	0.30567	3.27149	27.7732	90.8596	0.011006
49	0.29822	3.35328	28.0714	94.1311	0.010623
50	0.29094	3.43711	28.3623	97.4843	0.010258

按 3% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.030000
$i^{(2)}$	0.029778
$i^{(4)}$	0.029668
$i^{(12)}$	0.029595
δ	0.029559
d	0.029126
$d^{(2)}$	0.029341
$d^{(4)}$	0.029450
$d^{(12)}$	0.029522
δ	0.029559
v	0.970874
$v^{1/2}$	0.985329
$v^{1/4}$	0.992638
$v^{1/12}$	0.997540
$1+i$	1.030000
$(1+i)^{1/2}$	1.014889
$(1+i)^{1/4}$	1.007417
$(1+i)^{1/12}$	1.002466
$i/i^{(2)}$	1.007445
$i/i^{(4)}$	1.011181
$i/i^{(12)}$	1.013677
i/δ	1.014926
$i/d^{(2)}$	1.022445
$i/d^{(4)}$	1.018681
$i/d^{(12)}$	1.016177
i/δ	1.014926

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.97087	1.03000	0.9709	1.0000	1.00000
2	0.94260	1.06090	1.9135	2.0300	0.492611
3	0.91514	1.09273	2.8286	3.0909	0.323530
4	0.88849	1.12551	3.7171	4.1836	0.239027
5	0.86261	1.15927	4.5797	5.3091	0.188355
6	0.83748	1.19405	5.4172	6.4684	0.154598
7	0.81309	1.22987	6.2303	7.6625	0.130506
8	0.78941	1.26677	7.0197	8.8923	0.112456
9	0.76642	1.30477	7.7861	10.1591	0.098434
10	0.74409	1.34392	8.5302	11.4639	0.087231
11	0.72242	1.38423	9.2526	12.8078	0.078077
12	0.70138	1.42576	9.9540	14.1920	0.070462
13	0.68095	1.46853	10.6350	15.6178	0.064030
14	0.66112	1.51259	11.2961	17.0863	0.058526
15	0.64186	1.55797	11.9379	18.5989	0.053767
16	0.62317	1.60471	12.5611	20.1569	0.049611
17	0.60502	1.65285	13.1661	21.7616	0.045953
18	0.58739	1.70243	13.7535	23.4144	0.042709
19	0.57029	1.75351	14.3238	25.1169	0.039814
20	0.55368	1.80611	14.8775	26.8704	0.037216
21	0.53755	1.86029	15.4150	28.6765	0.034872
22	0.52189	1.91610	15.9369	30.5368	0.032747
23	0.50669	1.97359	16.4436	32.4529	0.030814
24	0.49193	2.03279	16.9355	34.4265	0.029047
25	0.47761	2.09378	17.4131	36.4593	0.027428
26	0.46369	2.15659	17.8768	38.5530	0.025938
27	0.45019	2.22129	18.3270	40.7096	0.024564
28	0.43708	2.28793	18.7641	42.9309	0.023293
29	0.42435	2.35657	19.1885	45.2189	0.022115
30	0.41199	2.42726	19.6004	47.5754	0.021019
31	0.39999	2.50008	20.0004	50.0027	0.019999
32	0.38834	2.57508	20.3888	52.5028	0.019047
33	0.37703	2.65234	20.7658	55.0778	0.018156
34	0.36604	2.73191	21.1318	57.7302	0.017322
35	0.35538	2.81386	21.4872	60.4621	0.016539
36	0.34503	2.89828	21.8323	63.2759	0.015804
37	0.33498	2.98523	22.1672	66.1742	0.015112
38	0.32523	3.07478	22.4925	69.1594	0.014459
39	0.31575	3.16703	22.8082	72.2342	0.013844
40	0.30656	3.26204	23.1148	75.4013	0.013262
41	0.29763	3.35990	23.4124	78.6633	0.012712

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
42	0.28896	3.46070	23.7014	82.0232	0.012192
43	0.28054	3.56452	23.9819	85.4839	0.011698
44	0.27237	3.67145	24.2543	89.0484	0.011230
45	0.26444	3.78160	24.5187	92.7199	0.010785
46	0.25674	3.89504	24.7754	96.5015	0.010363
47	0.24926	4.01190	25.0247	10.3965	0.009961
48	0.24200	4.13225	25.2667	104.4084	0.009578
49	0.23495	4.25622	25.5017	108.5406	0.009213
50	0.22811	4.38391	25.7298	112.7969	0.008865

按 3.5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.035000
$i^{(2)}$	0.034699
$i^{(4)}$	0.034550
$i^{(12)}$	0.034451
δ	0.034401
d	0.033816
$d^{(2)}$	0.034107
$d^{(4)}$	0.034254
$d^{(12)}$	0.034352
δ	0.034401
v	0.966184
$v^{1/2}$	0.982946
$v^{1/4}$	0.991437
$v^{1/12}$	0.997137
$1+i$	1.035000
$(1+i)^{1/2}$	1.017349
$(1+i)^{1/4}$	1.008637
$(1+i)^{1/12}$	1.002871
$i/i^{(2)}$	1.008675
$i/i^{(4)}$	1.013031
$i/i^{(12)}$	1.015942
i/δ	1.017400

常数	
函数	值
$i/d^{(2)}$	1.026175
$i/d^{(4)}$	1.021781
$i/d^{(12)}$	1.018859
i/δ	1.017400

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.96618	1.03500	0.9662	1.000	1.000000
2	0.93351	1.07122	1.8997	2.0350	0.491400
3	0.90194	1.10872	2.8016	3.1062	0.321934
4	0.87144	1.14752	3.6731	4.2149	0.237251
5	0.84197	1.18769	4.5151	5.3625	0.186481
6	0.81350	1.22926	5.3286	6.5502	0.152668
7	0.78599	1.27228	6.1145	7.7794	0.128544
8	0.75941	1.31681	6.8740	9.0517	0.110477
9	0.73373	1.36290	7.6077	10.3685	0.096446
10	0.70892	1.41060	8.3166	11.7314	0.085241
11	0.68495	1.45997	9.0016	13.1420	0.076092
12	0.66178	11.60103	9.3851	15.0258	0.066552
13	0.60057	1.66507	9.9856	16.6268	0.060144
14	0.57748	1.73168	10.5631	18.2919	0.054669
15	0.55526	1.80094	11.1184	20.0236	0.049941
16	0.53391	1.87298	11.6523	21.8245	0.045820
17	0.51337	1.94790	12.1657	23.6975	0.042199
18	0.49363	2.02582	12.6593	25.6454	0.038993
19	0.47464	2.10685	13.1339	27.6712	0.036139
20	0.45639	2.19112	13.5903	29.7781	0.033582
21	0.43883	2.27877	14.0292	31.9692	0.031280
22	0.42196	2.36992	14.4511	34.2480	0.029199
23	0.40573	2.46472	14.8568	36.6179	0.027309
24	0.39012	2.56330	15.2470	39.0826	0.025587
25	0.37512	2.66584	15.6221	41.6459	0.024012
26	0.36069	2.77247	15.9828	44.3117	0.022567
27	0.34682	2.88337	16.3296	47.0842	0.021239
28	0.33348	2.99870	16.6631	49.9676	0.020013
29	0.32065	3.11865	16.9837	52.9663	0.018880
30	0.30832	3.24340	17.2920	56.0849	0.017830
31	0.29646	3.37313	17.5885	59.3283	0.016855
32	0.28506	3.50806	17.8736	62.7015	0.015949
33	0.27409	3.64838	18.1476	66.2095	0.015104
34	0.26355	3.79432	18.4112	69.8579	0.014315
35	0.25342	3.94609	18.6646	73.6522	0.013577

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
36	0.24367	4.10393	18.9083	77.5983	0.012887
37	0.23430	4.26809	19.1426	81.7022	0.012240
38	0.22529	4.43881	19.3679	85.9703	0.011632
39	0.21662	4.61637	19.5845	90.4091	0.011061
40	0.20829	4.80102	19.7928	95.0255	0.010523
41	0.20028	4.99306	19.9931	99.8265	0.010017
42	0.19257	5.19278	20.1856	104.8196	0.009540
43	0.18517	5.40050	20.3708	110.0124	0.009090
44	0.17805	5.61652	20.5488	115.4129	0.008665
45	0.17120	5.84118	20.7200	121.0294	0.008262
46	0.16461	6.07482	20.8847	126.8706	0.007882
47	0.15828	6.31782	21.0429	132.9454	0.007522
48	0.15219	6.57053	21.1951	139.2632	0.007181
49	0.14634	6.83335	21.3415	145.8337	0.006857
50	0.14071	7.10668	21.4822	152.6671	0.006550

按 4% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.040000
$i^{(2)}$	0.039608
$i^{(4)}$	0.039414
$i^{(12)}$	0.039285
δ	0.039221
d	0.038462
$d^{(2)}$	0.038839
$d^{(4)}$	0.039029
$d^{(12)}$	0.039157
δ	0.039221
v	0.961538
$v^{1/2}$	0.980581
$v^{1/4}$	0.990243
$v^{1/12}$	0.996737
$1+i$	1.040000
$(1+i)^{1/2}$	1.019804
$(1+i)^{1/4}$	1.009853
$(1+i)^{1/12}$	1.003274

常数	
函数	值
$i/i^{(2)}$	1.009902
$i/i^{(4)}$	1.014877
$i/i^{(12)}$	1.018204
i/δ	1.019869
$i/d^{(2)}$	1.029902
$i/d^{(4)}$	1.024877
$i/d^{(12)}$	1.021537
i/δ	1.019869

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.96154	1.04000	0.9615	1.0000	1.00000
2	0.92456	1.08160	1.8861	2.0400	0.490196
3	0.88900	1.12486	2.7751	3.1216	0.320349
4	0.85480	1.16986	3.6299	4.2465	0.235490
5	0.82193	1.21665	4.4518	5.4163	0.184627
6	0.79031	1.26532	5.2421	6.6330	0.150762
7	0.75992	1.31593	6.0021	7.8983	0.126610
8	0.73069	1.36857	6.7327	9.2142	0.108528
9	0.70259	1.42331	7.4353	10.5828	0.094493
10	0.67556	1.48024	8.1109	12.0061	0.083291
11	0.64958	1.53945	8.7605	13.4864	0.074149
12	0.62460	1.60103	9.3851	15.0258	0.066552
13	0.60057	1.66507	9.9856	16.6268	0.060144
14	0.57748	1.73168	10.5631	18.2919	0.054669
15	0.55526	1.80094	11.1184	20.0236	0.049941
16	0.53391	1.87298	11.6523	21.8245	0.045820
17	0.51337	1.94790	12.1657	23.6975	0.042199
18	0.49363	2.02582	12.6593	25.6454	0.038993
19	0.47464	2.10685	13.1339	27.6712	0.036139
20	0.45639	2.19112	13.5903	29.7781	0.033582
21	0.43883	2.27877	14.0292	31.9692	0.031280
22	0.42196	2.36992	14.4511	34.2480	0.029199
23	0.40573	2.46472	14.8568	36.6179	0.027309
24	0.39012	2.56330	15.2470	39.0826	0.025587
25	0.37512	2.66584	15.6221	41.6459	0.024012
26	0.36069	2.77247	15.9828	44.3117	0.022567
27	0.34682	2.88337	16.3296	47.0842	0.021239
28	0.33348	2.99870	16.6631	49.9676	0.020013
29	0.32065	3.11865	16.9837	52.9663	0.018880
30	0.30832	3.24340	17.2920	56.0849	0.017830

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
31	0.29646	3.37313	17.5885	59.3283	0.016855
32	0.28506	3.50806	17.8736	62.7015	0.015949
33	0.27409	3.64838	18.1476	66.2095	0.015104
34	0.26355	3.79432	18.4112	69.8579	0.014315
35	0.25342	3.94609	18.6646	73.6522	0.013577
36	0.24367	4.10393	18.9083	77.5983	0.012887
37	0.23430	4.26809	19.1426	81.7022	0.012240
38	0.22529	4.43881	19.3679	85.9703	0.011632
39	0.21662	4.61637	19.5845	90.4091	0.011061
40	0.20829	4.80102	19.7928	95.0255	0.010523
41	0.20028	4.99306	19.9931	99.8265	0.010017
42	0.19257	5.19278	20.1856	104.8196	0.009540
43	0.18517	5.40050	20.3708	110.0124	0.009090
44	0.17805	5.61652	20.5488	115.4129	0.008665
45	0.17120	5.84118	20.7200	121.0294	0.008262
46	0.16461	6.07482	20.8847	126.8706	0.007882
47	0.15828	6.31782	21.0429	132.9454	0.007522
48	0.15219	6.57053	21.1951	139.2632	0.007181
49	0.14634	6.83335	21.3415	145.8337	0.006857
50	0.14071	7.10668	21.4822	152.6671	0.006550

按 4.5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.045000
$i^{(2)}$	0.044505
$i^{(4)}$	0.044260
$i^{(12)}$	0.044098
δ	0.044017
d	0.043062
$d^{(2)}$	0.043536
$d^{(4)}$	0.043776
$d^{(12)}$	0.043936
δ	0.044017
v	0.956938
$v^{1/2}$	0.978232
$v^{1/4}$	0.989056
$v^{1/12}$	0.996339

常数	
函数	值
$1+i$	1.045000
$(1+i)^{1/2}$	1.022252
$(1+i)^{1/4}$	1.011065
$(1+i)^{1/12}$	1.003675
$i/i^{(2)}$	1.011126
$i/i^{(4)}$	1.016720
$i/i^{(12)}$	1.020461
i/δ	1.022335
$i/d^{(2)}$	1.033626
$i/d^{(4)}$	1.027970
$i/d^{(12)}$	1.024211
i/δ	1.022335

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.95694	1.04500	0.9569	1.000	1.000000
2	0.91573	1.09202	1.8727	2.0450	0.488998
3	0.87630	1.14117	2.7490	3.1370	0.318773
4	0.83856	1.19252	3.5875	4.2782	0.233744
5	0.80245	1.24618	4.3900	5.4707	0.182792
6	0.76790	1.30226	5.1579	6.7169	0.148878
7	0.73483	1.36086	5.8927	8.0192	0.124701
8	0.70319	1.42210	6.5959	9.3800	0.106610
9	0.67290	1.48610	7.2688	10.8021	0.092574
10	0.64393	1.55297	7.9127	12.2882	0.081379
11	0.61620	1.62285	8.5289	13.8412	0.072248
12	0.58966	1.69588	9.1186	15.4640	0.064666
13	0.56427	1.77220	9.6829	17.1599	0.058275
14	0.53997	1.85194	10.2228	18.9321	0.052820
15	0.51672	1.93528	10.7395	20.7841	0.048114
16	0.49447	2.02237	11.2340	22.7193	0.044015
17	0.47318	2.11338	11.7072	24.7417	0.040418
18	0.45280	2.20848	12.1600	26.8551	0.037237
19	0.43330	2.30786	12.5933	29.0636	0.034407
20	0.41464	2.41171	13.0079	31.3714	0.031876
21	0.39679	2.52024	13.4047	33.7831	0.029601
22	0.37970	2.63365	13.7844	36.3034	0.027546
23	0.36335	2.75217	14.1478	38.9370	0.025682
24	0.34770	2.87601	14.4955	41.6892	0.023987

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
25	0.33273	3.00543	14.8282	44.5652	0.022439
26	0.31840	3.14068	15.1466	47.5706	0.021021
27	0.30469	3.28201	15.4513	50.7113	0.019719
28	0.29157	3.42970	15.7429	53.9933	0.018521
29	0.27902	3.58404	16.0219	57.4230	0.017415
30	0.26700	3.74532	16.2889	61.0071	0.016392
31	0.25550	3.91386	16.5444	64.7524	0.015443
32	0.24450	4.08998	16.7889	68.6662	0.014563
33	0.23397	4.27403	17.0229	72.7562	0.013745
34	0.22390	4.46636	17.2468	77.0303	0.012982
35	0.21425	4.66735	17.4610	81.4966	0.012270
36	0.20503	4.87738	17.6660	86.1640	0.011606
37	0.19620	5.09686	17.8622	91.0413	0.010984
38	0.18775	5.32622	18.0500	96.1382	0.010402
39	0.17967	5.56590	18.2297	101.4644	0.009856
40	0.17193	5.81636	18.4016	107.0303	0.009343
41	0.16453	6.07810	18.5661	112.8467	0.008862
42	0.15744	6.35162	18.7235	118.9248	0.008409
43	0.15066	6.63744	18.8742	125.2764	0.007982
44	0.14417	6.93612	19.0184	131.9138	0.007581
45	0.13796	7.24825	19.1563	138.8500	0.007202
46	0.13202	7.57442	19.2884	146.0982	0.006845
47	0.12634	7.91527	19.4147	153.6726	0.006507
48	0.12090	8.27146	19.5356	161.5879	0.006189
49	0.11569	8.64367	19.6513	169.8594	0.005887
50	0.11071	9.03264	19.7620	178.5030	0.005602

按 5% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.050000
$i^{(2)}$	0.049390
$i^{(4)}$	0.049089
$i^{(12)}$	0.048889
δ	0.048790
d	0.047619
$d^{(2)}$	0.048200
$d^{(4)}$	0.048494
$d^{(12)}$	0.048691

常数	
函数	值
δ	0.048790
v	0.952381
$v^{1/2}$	0.975900
$v^{1/4}$	0.987877
$v^{1/12}$	0.995942
$1+i$	1.050000
$(1+i)^{1/2}$	1.024695
$(1+i)^{1/4}$	1.012272
$(1+i)^{1/12}$	1.004074
$i/i^{(2)}$	1.012348
$i/i^{(4)}$	1.018559
$i/i^{(12)}$	1.022715
i/δ	1.024797
$i/d^{(2)}$	1.037348
$i/d^{(4)}$	1.031059
$i/d^{(12)}$	1.026881
i/δ	1.024797

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.95238	1.05000	0.9524	1.0000	1.00000
2	0.90703	1.10250	1.8594	2.0500	0.487805
3	0.86384	1.15763	2.7232	3.1525	0.317209
4	0.82270	1.21551	3.5460	4.3101	0.232012
5	0.78353	1.27628	4.3295	5.5256	0.180975
6	0.74622	1.34010	5.0757	6.8019	0.147017
7	0.71068	1.40710	5.7864	8.1420	0.122820
8	0.67684	1.47746	6.4632	9.5491	0.104722
9	0.64461	1.55133	7.1078	11.0266	0.090690
10	0.61391	1.62889	7.7217	12.5779	0.079505
11	0.58468	1.71034	8.3064	14.2068	0.070389
12	0.55684	1.79586	8.8633	15.9171	0.062825
13	0.53032	1.88565	9.3936	17.7130	0.056456
14	0.50507	1.97993	9.8986	19.5986	0.051024
15	0.48102	2.07893	10.3797	21.5786	0.046342
16	0.45811	2.18287	10.8378	23.6575	0.042270
17	0.43630	2.29202	11.2741	25.8404	0.038699

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
18	0.41552	2.40662	11.6896	28.1324	0.035546
19	0.39573	2.52695	12.0853	30.5390	0.032745
20	0.37689	2.65330	12.4622	33.0660	0.030243
21	0.35894	2.78596	12.8212	35.7193	0.027996
22	0.34185	2.92526	13.1630	38.5052	0.025971
23	0.32557	3.07152	13.4886	41.4305	0.024137
24	0.31007	3.22510	13.7986	44.5020	0.022471
25	0.29530	3.38635	14.0939	47.7271	0.020952
26	0.28124	3.55567	14.3752	51.1135	0.019564
27	0.26785	3.73346	14.6430	54.6691	0.018292
28	0.25509	3.92013	14.8981	58.4026	0.017123
29	0.24295	4.11614	15.1411	62.3227	0.016046
30	0.23138	4.32194	15.3725	66.4388	0.015051
31	0.22036	4.53804	15.5928	70.7608	0.014132
32	0.20987	4.76494	15.8027	75.2988	0.013280
33	0.19987	5.00319	16.0025	80.0638	0.012490
34	0.19035	5.25335	16.1929	85.0670	0.011755
35	0.18129	5.51602	16.3742	90.3203	0.011072
36	0.17266	5.79182	16.5469	95.8363	0.010434
37	0.16444	6.08141	16.7113	101.6281	0.009840
38	0.15661	6.38548	16.8679	107.7095	0.009284
39	0.14915	6.70475	17.0170	114.0950	0.008765
40	0.14205	7.03999	17.1591	120.7998	0.008278
41	0.13528	7.39199	17.2944	127.8398	0.007822
42	0.12884	7.76159	17.4232	135.2318	0.007395
43	0.12270	8.14967	17.5459	142.9933	0.006993
44	0.11686	8.55715	17.6628	151.1430	0.006616
45	0.11130	8.98501	17.7741	159.7002	0.006262
46	0.10600	9.43426	17.8801	168.6852	0.005928
47	0.10095	9.90597	17.9810	178.1194	0.005614
48	0.09614	10.40127	18.0772	188.0254	0.005318
49	0.09156	10.92133	18.1687	198.4267	0.005040
50	0.08720	11.46740	18.2559	209.3480	0.004777

按 6% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.060000
$i^{(2)}$	0.059126
$i^{(4)}$	0.058695

常数	
函数	值
$i^{(12)}$	0.058411
δ	0.058269
d	0.056604
$d^{(2)}$	0.057428
$d^{(4)}$	0.057847
$d^{(12)}$	0.058128
δ	0.058269
v	0.943396
$v^{1/2}$	0.971286
$v^{1/4}$	0.985538
$v^{1/12}$	0.995156
$1+i$	1.060000
$(1+i)^{1/2}$	1.029563
$(1+i)^{1/4}$	1.014674
$(1+i)^{1/12}$	1.004868
$i/i^{(2)}$	1.014782
$i/i^{(4)}$	1.022227
$i/i^{(12)}$	1.027211
i/δ	1.029709
$i/d^{(2)}$	1.044782
$i/d^{(4)}$	1.037227
$i/d^{(12)}$	1.032211
i/δ	1.029709

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.94340	1.06000	0.9434	1.0000	1.00000
2	0.89000	1.12360	1.8334	2.0600	0.485437
3	0.83962	1.19102	2.6730	3.1836	0.314110
4	0.79209	1.26248	3.4651	4.3746	0.228591
5	0.74726	1.33823	4.2124	5.6371	0.177396
6	0.70496	1.41852	4.9173	6.9753	0.143363
7	0.66506	1.50363	5.5824	8.3938	0.119135
8	0.62741	1.59385	6.2098	9.8975	0.101036
9	0.59190	1.68948	6.8017	11.4913	0.087022
10	0.55839	1.79085	7.3601	13.1808	0.075868

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
11	0.52679	1.89830	7.8869	14.9716	0.066793
12	0.49697	2.01220	8.3838	16.8699	0.059277
13	0.46884	2.13293	8.8527	18.8821	0.052960
14	0.44230	2.26090	9.2950	21.0151	0.047585
15	0.41727	2.39656	9.7122	23.2760	0.042963
16	0.39365	2.54035	10.1059	25.6725	0.038952
17	0.37136	2.69277	10.4773	28.2129	0.035445
18	0.35034	2.85434	10.8276	30.9057	0.032357
19	0.33051	3.02560	11.1581	33.7600	0.029621
20	0.31180	3.20714	11.4699	36.7856	0.027185
21	0.29416	3.39956	11.7641	39.9927	0.025005
22	0.27751	3.60354	12.0416	43.3923	0.023046
23	0.26180	3.81975	12.3034	46.9958	0.021278
24	0.24698	4.04893	12.5504	50.8156	0.019679
25	0.23300	4.29187	12.7834	54.8645	0.018227
26	0.21981	4.54938	13.0032	59.1564	0.016904
27	0.20737	4.82235	13.2105	63.7058	0.015697
28	0.19563	5.11169	13.4062	68.5281	0.014593
29	0.18456	5.41839	13.5907	73.6398	0.013580
30	0.17411	5.74349	13.7648	79.0582	0.012649
31	0.16425	6.08810	13.9291	84.8017	0.011792
32	0.15496	6.45339	14.0840	90.8898	0.011002
33	0.14619	6.84059	14.2302	97.3432	0.010273
34	0.13791	7.25103	14.3681	104.1838	0.009598
35	0.13011	7.68609	14.4982	111.4348	0.008974
36	0.12274	8.14725	14.6210	119.1209	0.008395
37	0.11579	8.63609	14.7368	127.2681	0.007857
38	0.10924	9.15425	14.8460	135.9042	0.007358
39	0.10306	9.70351	14.9491	145.0585	0.006894
40	0.09722	10.28572	15.0463	154.7620	0.006462
41	0.09172	10.90286	15.1380	165.0477	0.006059
42	0.08653	11.55703	15.2245	175.9505	0.005683
43	0.08163	12.25045	15.3062	187.5076	0.005333
44	0.07701	12.98548	15.3832	199.7580	0.005006
45	0.07265	13.76461	15.4558	212.7435	0.004700
46	0.06854	14.59049	15.5244	226.5081	0.004415
47	0.06466	15.46592	15.5890	241.0986	0.004148
48	0.06100	16.39387	15.6500	256.5645	0.003898
49	0.05755	17.37750	15.7076	272.9584	0.003664
50	0.05429	18.42015	15.7619	290.3359	0.003444

按 7% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.070000
$i^{(2)}$	0.068816
$i^{(4)}$	0.068234
$i^{(12)}$	0.067850
δ	0.067659
d	0.065421
$d^{(2)}$	0.066527
$d^{(4)}$	0.067090
$d^{(12)}$	0.067468
δ	0.067659
v	0.934579
$v^{1/2}$	0.966736
$v^{1/4}$	0.983228
$v^{1/12}$	0.994378
$1+i$	1.070000
$(1+i)^{1/2}$	1.034408
$(1+i)^{1/4}$	1.017059
$(1+i)^{1/12}$	1.005654
$i/i^{(2)}$	1.017204
$i/i^{(4)}$	1.025880
$i/i^{(12)}$	1.031691
i/δ	1.034605
$i/d^{(2)}$	1.052204
$i/d^{(4)}$	1.043380
$i/d^{(12)}$	1.037525
i/δ	1.034605

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.93458	1.07000	0.9346	1.0000	1.00000
2	0.87344	1.14490	1.8080	2.0700	0.483092
3	0.81630	1.22504	2.6243	3.2149	0.311052
4	0.76290	1.31080	3.3872	4.4399	0.225228
5	0.71299	1.40255	4.1002	5.7507	0.173891

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
6	0.66634	1.50073	4.7665	7.1533	0.139796
7	0.62275	1.60578	5.3893	8.6540	0.115553
8	0.58201	1.71819	5.9713	10.2598	0.097468
9	0.54393	1.83846	6.5152	11.9780	0.083486
10	0.50835	1.96715	7.0236	13.8164	0.072378
11	0.47509	2.10485	7.4987	15.7836	0.063357
12	0.44401	2.25219	7.9427	17.8885	0.055902
13	0.41496	2.40985	8.3577	20.1406	0.049651
14	0.38782	2.57853	8.7455	22.5505	0.044345
15	0.36245	2.75903	9.1079	25.1290	0.039795
16	0.33873	2.95216	9.4466	27.8881	0.035858
17	0.31657	3.15882	9.7632	30.8402	0.032425
18	0.29586	3.37993	10.0591	33.9990	0.029413
19	0.27651	3.61653	10.3356	37.3790	0.026753
20	0.25842	3.86968	10.5940	40.9955	0.024393
21	0.24151	4.14056	10.8355	44.8652	0.022289
22	0.22571	4.43040	11.0612	49.0057	0.020406
23	0.21095	4.74053	11.2722	53.4361	0.018714
24	0.19715	5.07237	11.4693	58.1767	0.017189
25	0.18425	5.42743	11.6536	63.2490	0.015811
26	0.17220	5.80735	11.8258	68.6765	0.014561
27	0.16093	6.21387	11.9867	74.4838	0.013426
28	0.15040	6.64884	12.1371	80.6977	0.012392
29	0.14056	7.11426	12.2777	87.3465	0.011449
30	0.13137	7.61226	12.4090	94.4608	0.010586
31	0.12277	8.14511	12.5318	102.0730	0.009797
32	0.11474	8.71527	12.6466	110.2182	0.009073
33	0.10723	9.32534	12.7538	118.9334	0.008408
34	0.10022	9.97811	12.8540	128.2588	0.007797
35	0.09366	10.67658	12.9477	138.2369	0.007234
36	0.08754	11.42394	13.0352	148.9135	0.006715
37	0.08181	12.22362	13.1170	160.3374	0.006237
38	0.07646	13.07927	13.1935	172.5610	0.005795
39	0.07146	13.99482	13.2649	185.6403	0.005387
40	0.06678	14.97446	13.3317	199.6351	0.005009
41	0.06241	16.02267	13.3941	214.6096	0.004660
42	0.05833	17.14426	13.4524	230.6322	0.004336
43	0.05451	18.34435	13.5070	247.7765	0.004036
44	0.05095	19.62846	13.5579	266.1209	0.003758
45	0.04761	21.00245	13.6055	285.7493	0.003500
46	0.04450	22.47262	13.6500	306.7518	0.003260

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
47	0.04159	24.04571	13.6916	329.2244	0.003037
48	0.03887	25.72891	13.7305	353.2701	0.002831
49	0.03632	27.52993	13.7668	378.9990	0.002639
50	0.03395	29.45703	13.8007	406.5289	0.002460

按 8% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.080000
$i^{(2)}$	0.078461
$i^{(4)}$	0.077706
$i^{(12)}$	0.077208
δ	0.076961
d	0.074074
$d^{(2)}$	0.075499
$d^{(4)}$	0.076225
$d^{(12)}$	0.076715
δ	0.076961
v	0.925926
$v^{1/2}$	0.962250
$v^{1/4}$	0.980944
$v^{1/12}$	0.993607
$1+i$	1.080000
$(1+i)^{1/2}$	1.039230
$(1+i)^{1/4}$	1.019427
$(1+i)^{1/12}$	1.006434
$i/i^{(2)}$	1.019615
$i/i^{(4)}$	1.029519
$i/i^{(12)}$	1.036157
i/δ	1.039487
$i/d^{(2)}$	1.059615
$i/d^{(4)}$	1.049519
$i/d^{(12)}$	1.042824
i/δ	1.039487

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.92593	1.08000	0.9259	1.0000	1.00000
2	0.85734	1.16640	1.7833	2.0800	0.480769
3	0.79383	1.25971	2.5771	3.2464	0.308034
4	0.73503	1.36049	3.3121	4.5061	0.221921
5	0.68058	1.46933	3.9927	5.8666	0.170456
6	0.63017	1.58687	4.6229	7.3359	0.136315
7	0.58349	1.71382	5.2064	8.9228	0.112072
8	0.54027	1.85093	5.7466	10.6366	0.094015
9	0.50025	1.99900	6.2469	12.4876	0.080080
10	0.46319	2.15892	6.7101	14.4866	0.069029
11	0.42888	2.33164	7.1390	16.6455	0.060076
12	0.39711	2.51817	7.5361	18.9771	0.052695
13	0.36770	2.71962	7.9038	21.4953	0.046522
14	0.34046	2.93719	8.2442	24.2149	0.041297
15	0.31524	3.17217	8.5595	27.1521	0.036830
16	0.29189	3.42594	8.8514	30.3243	0.032977
17	0.27027	3.70002	9.1216	33.7502	0.029629
18	0.25025	3.99602	9.3719	37.4502	0.026702
19	0.23171	4.31570	9.6036	41.4463	0.024128
20	0.21455	4.66096	9.8181	45.7620	0.021852
21	0.19866	5.03383	10.0168	50.4229	0.019832
22	0.18394	5.43654	10.2007	55.4568	0.018032
23	0.17032	5.87146	10.3711	60.8933	0.016422
24	0.15770	6.34118	10.5288	66.7648	0.014978
25	0.14602	6.84848	10.6748	73.1059	0.013679
26	0.13520	7.39635	10.8100	79.9544	0.012507
27	0.12519	7.98806	10.9352	87.3508	0.011448
28	0.11591	8.62711	11.0511	95.3388	0.010489
29	0.10733	9.31727	11.1584	103.9659	0.009619
30	0.09938	10.06266	11.2578	113.2832	0.008827
31	0.09202	10.86767	11.3498	123.3459	0.008107
32	0.08520	11.73708	11.4350	134.2135	0.007451
33	0.07889	12.67605	11.5139	145.9506	0.006852
34	0.07305	13.69013	11.5869	158.6267	0.006304
35	0.06763	14.78534	11.6546	172.3168	0.005803
36	0.06262	15.96817	11.7172	187.1021	0.005345
37	0.05799	17.24563	11.7752	203.0703	0.004924
38	0.05369	18.62528	11.8289	220.3159	0.004539
39	0.04971	20.11530	11.8786	238.9412	0.004185
40	0.04603	21.72452	11.9246	259.0565	0.003860
41	0.04262	23.46248	11.9672	280.7810	0.003561

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
42	0.03946	25.33948	12.0067	304.2435	0.003287
43	0.03654	27.36664	12.0432	329.5830	0.003034
44	0.03383	29.55597	12.0771	356.9496	0.002802
45	0.03133	31.92045	12.1084	386.5056	0.002587
46	0.02901	34.47409	12.1374	418.4261	0.002390
47	0.02686	37.23201	12.1643	452.9002	0.002208
48	0.02487	40.21057	12.1891	490.1322	0.002040
49	0.02303	43.42742	12.2122	530.3427	0.001886
50	0.02132	46.90161	12.2335	573.7702	0.001743

按 9% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.090000
$i^{(2)}$	0.088061
$i^{(4)}$	0.087113
$i^{(12)}$	0.086488
δ	0.086178
d	0.082569
$d^{(2)}$	0.084347
$d^{(4)}$	0.085256
$d^{(12)}$	0.085869
δ	0.086178
v	0.917431
$v^{1/2}$	0.957826
$v^{1/4}$	0.978686
$v^{1/12}$	0.992844
$1+i$	1.090000
$(1+i)^{1/2}$	1.044031
$(1+i)^{1/4}$	1.021778
$(1+i)^{1/12}$	1.007207
$i/i^{(2)}$	1.022015
$i/i^{(4)}$	1.033144
$i/i^{(12)}$	1.040608
i/δ	1.044354

常数	
函数	值
$i/d^{(2)}$	1.067015
$i/d^{(4)}$	1.055644
$i/d^{(12)}$	1.048108
i/δ	1.044354

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.91743	1.09000	0.9174	1.0000	1.00000
2	0.84168	1.18810	1.7591	2.0900	0.478469
3	0.77218	1.29503	2.5313	3.2781	0.305055
4	0.70843	1.41158	3.2397	4.5731	0.218669
5	0.64993	1.53862	3.8897	5.9847	0.167092
6	0.59627	1.67710	4.4859	7.5233	0.132920
7	0.54703	1.82804	5.0330	9.2004	0.108691
8	0.50187	1.99256	5.5348	11.0285	0.090674
9	0.46043	2.17189	5.9952	13.0210	0.076799
10	0.42241	2.36736	6.4177	15.1929	0.065820
11	0.38753	2.58043	6.8052	17.5603	0.056947
12	0.35553	2.81266	7.1607	20.1407	0.049651
13	0.32618	3.06580	7.4869	22.9534	0.043567
14	0.29925	3.34173	7.7862	26.0192	0.038433
15	0.27454	3.64248	8.0607	29.3609	0.034059
16	0.25187	3.97031	8.3126	33.0034	0.030300
17	0.23107	4.32763	8.5436	36.9737	0.027046
18	0.21199	4.71712	8.7556	41.3013	0.024212
19	0.19449	5.14166	8.9501	46.0185	0.021730
20	0.17843	5.60441	9.1285	51.1601	0.019546
21	0.16370	6.10881	9.2922	56.7645	0.017617
22	0.15018	6.65860	9.4424	62.8733	0.015905
23	0.13778	7.25787	9.5802	69.5319	0.014382
24	0.12640	7.91108	9.7066	76.7898	0.013023
25	0.11597	8.62308	9.8226	84.7009	0.011806
26	0.10639	9.39916	9.9290	93.3240	0.010715
27	0.09761	10.24508	10.0266	102.7231	0.009735
28	0.08955	11.16714	10.1161	112.9682	0.008852
29	0.08215	12.17218	10.1983	124.1354	0.008056
30	0.07537	13.26768	10.2737	136.3075	0.007336
31	0.06915	14.46177	10.3428	149.5752	0.006686
32	0.06344	15.76333	10.4062	164.0370	0.006096
33	0.05820	17.18203	10.4644	179.8003	0.005562
34	0.05339	18.72841	10.5178	196.9823	0.005077
35	0.04899	20.41397	10.5668	215.7108	0.004636

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
36	0.04494	22.25123	10.6118	236.1247	0.004235
37	0.04123	24.25384	10.6530	258.3759	0.003870
38	0.03783	26.43668	10.6908	282.6298	0.003538
39	0.03470	28.81598	10.7255	309.0665	0.003236
40	0.03184	31.40942	10.7574	337.8824	0.002960
41	0.02921	34.23627	10.7866	369.2919	0.002708
42	0.02680	37.31753	10.8134	403.5281	0.002478
43	0.02458	40.67611	10.8380	440.8457	0.002268
44	0.02255	44.33696	10.8605	481.5218	0.002077
45	0.02069	48.32729	10.8812	525.8587	0.001902
46	0.01898	52.67674	10.9002	574.1860	0.001742
47	0.01742	57.41765	10.9176	626.8628	0.001595
48	0.01598	62.58524	10.9336	684.2804	0.001461
49	0.01466	68.21791	10.9482	746.8656	0.001339
50	0.01345	74.35752	10.9617	815.0836	0.001227

按 10% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.100000
$i^{(2)}$	0.097618
$i^{(4)}$	0.096455
$i^{(12)}$	0.095690
δ	0.095310
d	0.090909
$d^{(2)}$	0.093075
$d^{(4)}$	0.094184
$d^{(12)}$	0.094933
δ	0.095310
v	0.909091
$v^{1/2}$	0.953463
$v^{1/4}$	0.976454
$v^{1/12}$	0.992089
$1+i$	1.100000
$(1+i)^{1/2}$	1.048809
$(1+i)^{1/4}$	1.024114
$(1+i)^{1/12}$	1.007974

常数	
函数	值
$i/i^{(2)}$	1.024404
$i/i^{(4)}$	1.036756
$i/i^{(12)}$	1.045045
i/δ	1.049206
$i/d^{(2)}$	1.074404
$i/d^{(4)}$	1.061756
$i/d^{(12)}$	1.053378
i/δ	1.049206

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.90909	1.10000	0.9091	1.0000	1.00000
2	0.82645	1.21000	1.7355	2.1000	0.476190
3	0.75131	1.33100	2.4869	3.3100	0.302115
4	0.68301	1.46410	3.1699	4.6410	0.215471
5	0.62092	1.61051	3.7908	6.1051	0.163797
6	0.56447	1.77156	4.3553	7.7156	0.129607
7	0.51316	1.94872	4.8684	9.4872	0.105405
8	0.46651	2.14359	5.3349	11.4359	0.087444
9	0.42410	2.35795	5.7590	13.5795	0.073641
10	0.38554	2.59374	6.1446	15.9374	0.062745
11	0.35049	2.85312	6.4951	18.5312	0.053963
12	0.31863	3.13843	6.8137	21.3843	0.046763
13	0.28966	3.45227	7.1034	24.5227	0.040779
14	0.26333	3.79750	7.3667	27.9750	0.035746
15	0.23939	4.17725	7.6061	31.7725	0.031474
16	0.21763	4.59497	7.8237	35.9497	0.027817
17	0.19784	5.05447	8.0216	40.5447	0.024664
18	0.17986	5.55992	8.2014	45.5992	0.021930
19	0.16351	6.11591	8.3649	51.1591	0.019547
20	0.14864	6.72750	8.5136	57.2750	0.017460
21	0.13513	7.40025	8.6487	64.0025	0.015624
22	0.12285	8.14027	8.7715	71.4027	0.014005
23	0.11168	8.95430	8.8832	79.5430	0.012572
24	0.10153	9.84973	8.9847	88.4973	0.011300
25	0.09230	10.83471	9.0770	98.3471	0.010168
26	0.08391	11.91818	9.1609	109.1818	0.009159
27	0.07628	13.10999	9.2372	121.0999	0.008258
28	0.06934	14.42099	9.3066	134.2099	0.007451
29	0.06304	15.86309	9.3696	148.6309	0.006728
30	0.05731	17.44940	9.4269	164.4940	0.006079

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
31	0.05210	19.19434	9.4790	181.9434	0.005496
32	0.04736	21.11378	9.5264	201.1378	0.004972
33	0.04306	23.22515	9.5694	222.2515	0.004499
34	0.03914	25.54767	9.6086	245.4767	0.004074
35	0.03558	28.10244	9.6442	271.0244	0.003690
36	0.03235	30.91268	9.6765	299.1268	0.003343
37	0.02941	34.00395	9.7059	330.0395	0.003030
38	0.02673	37.40434	9.7327	364.0434	0.002747
39	0.02430	41.14478	9.7570	401.4478	0.002491
40	0.02209	45.25926	9.7791	442.5926	0.002259
41	0.02009	49.78518	9.7991	487.8518	0.002050
42	0.01826	54.76370	9.8174	537.6370	0.001860
43	0.01660	60.24007	9.8340	592.4007	0.001688
44	0.01509	66.26408	9.8491	652.6408	0.001532
45	0.01372	72.89048	9.8628	718.9048	0.001391
46	0.01247	80.17953	9.8753	791.7953	0.001263
47	0.01134	88.19749	9.8866	871.9749	0.001147
48	0.01031	97.01723	9.8969	960.1723	0.001041
49	0.00937	106.71896	9.9063	1057.1896	0.000946
50	0.00852	117.39085	9.9148	1163.9085	0.000859

按 12% 的利息表

常数	
函数	值
i	0.120000
$i^{(2)}$	0.116601
$i^{(4)}$	0.114949
$i^{(12)}$	0.113866
δ	0.113329
d	0.107143
$d^{(2)}$	0.110178
$d^{(4)}$	0.111738
$d^{(12)}$	0.112795
δ	0.113329
v	0.892857
$v^{1/2}$	0.944911
$v^{1/4}$	0.972065
$v^{1/12}$	0.990600

常数	
函数	值
$1+i$	1.120000
$(1+i)^{1/2}$	1.058301
$(1+i)^{1/4}$	1.028737
$(1+i)^{1/12}$	1.009489
$i/i^{(2)}$	1.029150
$i/i^{(4)}$	1.043938
$i/i^{(12)}$	1.053875
i/δ	1.058867
$i/d^{(2)}$	1.089150
$i/d^{(4)}$	1.073938
$i/d^{(12)}$	1.063875
i/δ	1.058867

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.89286	1.12000	0.8929	1.0000	1.00000
2	0.79719	1.25440	1.6901	2.1200	0.471698
3	0.71178	1.40493	2.4018	3.3744	0.296349
4	0.63552	1.57352	3.0373	4.7793	0.209234
5	0.56743	1.76234	3.6048	6.3528	0.157410
6	0.50663	1.97382	4.1114	8.1152	0.123226
7	0.45235	2.21068	4.5638	10.0890	0.099118
8	0.40388	2.47596	4.9676	12.2997	0.081303
9	0.36061	2.77308	5.3282	14.7757	0.067679
10	0.32197	3.10585	5.6502	17.5487	0.056984
11	0.28748	3.47855	5.9377	20.6546	0.048415
12	0.25668	3.89598	6.1944	24.1331	0.041437
13	0.22917	4.36349	6.4235	28.0291	0.035677
14	0.20462	4.88711	6.6282	32.3926	0.030871
15	0.18270	5.47357	6.8109	37.2797	0.026824
16	0.16312	6.13039	6.9740	42.7533	0.023390
17	0.14564	6.86604	7.1196	48.8837	0.020457
18	0.13004	7.68997	7.2497	55.7497	0.017937
19	0.11611	8.61276	7.3658	63.4397	0.015763
20	0.10367	9.64629	7.4694	72.0524	0.013879
21	0.09256	10.80385	7.5620	81.6987	0.012240
22	0.08264	12.10031	7.6446	92.5026	0.010811
23	0.07379	13.55235	7.7184	104.6029	0.009560
24	0.06588	15.17863	7.7843	118.1552	0.008463

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
25	0.05882	17.00006	7.8431	133.3339	0.007500
26	0.05252	19.04007	7.8957	150.3339	0.006652
27	0.04689	21.32488	7.9426	169.3740	0.005904
28	0.04187	23.88387	7.9844	190.6989	0.005244
29	0.03738	26.74993	8.0218	214.5828	0.004660
30	0.03338	29.95992	8.0552	241.3327	0.004144
31	0.02980	33.55511	8.0850	271.2926	0.003686
32	0.02661	37.58173	8.1116	304.8477	0.003280
33	0.02376	42.09153	8.1354	342.4294	0.002920
34	0.02121	47.14252	8.1566	384.5210	0.002601
35	0.01894	52.79962	8.1755	431.6635	0.002317
36	0.01691	59.13557	8.1924	484.4631	0.002064
37	0.01510	66.23184	8.2075	543.5987	0.001840
38	0.01348	74.17966	8.2210	609.8305	0.001640
39	0.01204	83.08122	8.2330	684.0102	0.001462
40	0.01075	93.05097	8.2438	767.0914	0.001304
41	0.00960	104.21709	8.2534	860.1424	0.001163
42	0.00857	116.72314	8.2619	964.3595	0.001037
43	0.00765	130.72991	8.2696	1081.0826	0.000925
44	0.00683	146.41750	8.2764	1211.8125	0.000825
45	0.00610	163.98760	8.2825	1358.2300	0.000736
46	0.00544	183.66612	8.2880	1522.2176	0.000657
47	0.00486	205.70605	8.2928	1705.8838	0.000586
48	0.00434	230.39078	8.2972	1911.5898	0.000523
49	0.00388	258.03767	8.3010	2141.9806	0.000467
50	0.00346	289.00219	8.3045	240.0182	0.000417

附 录 II

年度计日表

对于闰年，在 2 月 28 日以后天数比表中数字加 1													
一个月中的天数	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一个月中的天数
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

附 录 III

变额年金的进一步分析

由数值分析，一阶差分定义为

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

逐次应用上述公式可定义高阶差分。

可以导出一个类似于分部积分的分部求和公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{n} \nu^t f(t) \\
= &\left[\frac{\nu^t}{\nu - 1}\left\{1 - \frac{\nu\Delta}{\nu - 1} + \frac{\nu^2\Delta^2}{(\nu-1)^2} - \frac{\nu^3\Delta^3}{(\nu-1)^3} + \cdots\right\} f(t)\right]_{t=1}^{t=n+1} \\
&= \left[\frac{\nu^{t-1}}{i}\left\{1 + \frac{\Delta}{i} + \frac{\Delta^2}{i^2} + \frac{\Delta^3}{i^3} + \cdots\right\} f(t)\right]_{t=n+1}^{t=1}
\end{aligned}$$

这一公式每当高阶差分经过某点可以被忽略时，就给出实际的结果。特别当 $f(t)$ 是 m 次多项式时，$m+1$ 阶及更高阶的差分均为零。

因此，此公式当变额年金的付款构成一多项式时可用来求此变额年金的现时值。

附 录 IV

抵押贷款分期偿还表示例

下面的附表是 $100000 的不动产抵押贷款月度付款分期偿还表，其中利率为月度转换 10% 。

最终有 $3.97 的余额可归因于舍入误差的积累。表中所用的月度付款 $877.57 算到分为止，如果算到更多位小数点则应是 $877.57158 。

在实践中，大多数贷款人可能会用月度付款 $877.58，这样最后一次付款可以小于而不是大于以前各次付款。

月度	本金	利息	余额	月度	本金	利息	余额
1	44.24	833.33	99955.76	31	56.74	820.83	98442.58
2	44.61	832.96	99911.15	32	57.22	820.35	98385.36
3	44.98	832.59	99866.17	33	57.69	819.88	98327.67
4	45.35	832.22	99820.82	34	58.17	819.40	98269.50
5	45.73	831.84	99775.09	35	58.66	818.91	98210.84
6	46.11	831.46	99728.98	36	59.15	818.42	98151.69
7	46.50	831.07	99682.48	37	59.64	817.93	98092.05
8	46.88	830.69	99635.60	38	60.14	817.43	98031.91
9	47.27	830.30	99588.33	39	60.64	816.93	97971.27
10	47.67	829.90	99540.66	40	61.14	816.43	97910.13
11	48.06	829.51	99492.60	41	61.65	815.92	97848.48
12	48.46	829.11	99444.14	42	62.17	815.40	97786.31
13	48.87	828.70	99395.27	43	62.68	814.89	97723.63
14	49.28	828.29	99345.99	44	63.21	814.36	97660.42
15	49.69	827.88	99296.30	45	63.73	813.84	97596.69
16	50.10	827.47	99246.20	46	64.26	813.31	97532.43
17	50.52	827.05	99195.68	47	64.80	812.77	97467.63
18	50.94	826.63	99144.74	48	65.34	812.23	97402.29
19	51.36	826.21	99093.38	49	65.88	811.69	97336.41
20	51.79	825.78	99041.59	50	66.43	811.14	97269.98
21	52.22	825.35	98989.37	51	66.99	810.58	97202.99
22	52.66	824.91	98936.71	52	67.55	810.02	97135.44
23	53.10	824.47	98883.61	53	68.11	809.46	97067.33
24	53.54	824.03	98830.07	54	68.68	808.89	96998.65
25	53.99	823.58	98776.08	55	69.25	808.32	96929.40
26	54.44	823.13	98721.64	56	69.82	807.75	96859.58
27	54.89	822.68	98666.75	57	70.41	807.16	96789.17
28	55.35	822.22	98611.40	58	70.99	806.58	96718.18
29	55.81	821.76	98555.59	59	71.59	805.98	96646.59
30	56.27	821.30	98499.32	60	72.18	805.39	96574.41

月度	本金	利息	余额	月度	本金	利息	余额
61	72.78	804.79	96501.63	91	93.36	784.21	94012.01
62	73.39	804.18	96428.24	92	94.14	783.43	93917.87
63	74.00	803.57	96354.24	93	94.92	782.65	93822.95
64	74.62	802.95	96279.62	94	95.71	781.86	93727.24
65	75.24	802.33	96204.38	95	96.51	781.06	93630.73
66	75.87	801.70	96128.51	96	97.31	780.26	93533.42
67	76.50	801.07	96052.01	97	98.12	779.45	93435.30
68	77.14	800.43	95974.87	98	98.94	778.63	93336.36
69	77.78	799.79	95897.09	99	99.77	777.80	93236.59
70	78.43	799.14	95818.66	100	100.60	776.97	93135.99
71	79.08	798.49	95739.58	101	101.44	776.13	93034.55
72	79.74	797.83	95659.84	102	102.28	775.29	92932.27
73	80.40	797.17	95579.44	103	103.13	774.44	92829.14
74	81.07	796.50	95498.37	104	103.99	773.58	92725.15
75	81.75	795.82	95416.62	105	104.86	772.71	92620.29
76	82.43	795.14	95334.19	106	105.73	771.84	92514.56
77	83.12	794.45	95251.07	107	106.62	770.95	92407.94
78	83.81	793.76	95167.26	108	107.50	770.07	92300.44
79	84.51	793.06	95082.75	109	108.40	769.17	92192.04
80	85.21	792.36	94997.54	110	109.30	768.27	92082.74
81	85.92	791.65	94911.62	111	110.21	767.36	91972.53
82	86.64	790.93	94824.98	112	111.13	766.44	91861.40
83	87.36	790.21	94737.62	113	112.06	765.51	91749.34
84	88.09	789.48	94649.53	114	112.99	764.58	91636.35
85	88.82	788.75	94560.71	115	113.93	763.64	91522.42
86	89.56	788.01	94471.15	116	114.88	762.69	91407.54
87	90.31	787.26	94380.84	117	115.84	761.73	91291.70
88	91.06	786.51	94289.78	118	116.81	760.76	91174.89
89	91.82	785.75	94197.96	119	117.78	759.79	91057.11
90	92.59	784.98	94105.37	120	118.76	758.81	90938.35

月度	本金	利息	余额
121	119.75	757.82	90818.60
122	120.75	756.82	90697.85
123	121.75	755.82	90576.10
124	122.77	754.80	90453.33
125	123.79	753.78	90329.54
126	124.82	752.75	90204.72
127	125.86	751.71	90078.86
128	126.91	750.66	89951.95
129	127.97	749.60	89823.98
130	129.04	748.53	89694.94
131	130.11	747.46	89564.83
132	131.20	746.37	89433.63
133	132.29	745.28	89301.34
134	133.39	744.18	89167.95
135	134.50	743.07	89033.45
136	135.62	741.95	88897.83
137	136.75	740.82	88761.08
138	137.89	739.68	88623.19
139	139.04	738.53	88484.15
140	140.20	737.37	88343.95
141	141.37	736.20	88202.58
142	142.55	735.02	88060.03
143	143.74	733.83	87916.29
144	144.93	732.64	87771.36
145	146.14	731.43	87625.22
146	147.36	730.21	87477.86
147	148.59	728.98	87329.27
148	149.83	727.74	87179.44
149	151.07	726.50	87028.37
150	152.33	725.24	86876.04
151	153.60	723.97	86722.44
152	154.88	722.69	86567.56
153	156.17	721.40	86411.39
154	157.48	720.09	86253.91
155	158.79	718.78	86095.12
156	160.11	717.46	85935.01
157	161.44	716.13	85773.57
158	162.79	714.78	85610.78
159	164.15	713.42	85446.63
160	165.51	712.06	85281.12
161	166.89	710.68	85114.23
162	168.28	709.29	84945.95
163	169.69	707.88	84776.26
164	171.10	706.47	84605.16
165	172.53	705.04	84432.63
166	173.96	703.61	84258.67
167	175.41	702.16	84083.26
168	176.88	700.69	83906.38
169	178.35	699.22	83728.03
170	179.84	697.73	83548.19
171	181.34	696.23	83366.85
172	182.85	694.72	83184.00
173	184.37	693.20	82999.63
174	185.91	691.66	82813.72
175	187.46	690.11	82626.26
176	189.02	688.55	82437.24
177	190.59	686.98	82246.65
178	192.18	685.39	82054.47
179	193.78	683.79	81860.69
180	195.40	682.17	81665.29

月度	本金	利息	余额	月度	本金	利息	余额
181	197.03	680.54	81468.26	211	252.72	624.85	74728.76
182	198.67	678.90	81269.59	212	254.83	622.74	74473.93
183	200.32	677.25	81069.27	213	256.95	620.62	74216.98
184	201.99	675.58	80867.28	214	259.10	618.47	73957.88
185	203.68	673.89	80663.60	215	261.25	616.32	73696.63
186	205.37	672.20	80458.23	216	263.43	614.14	73433.20
187	207.08	670.49	80251.15	217	265.63	611.94	73167.57
188	208.81	668.76	80042.34	218	267.84	609.73	72899.73
189	210.55	667.02	79831.79	219	270.07	607.50	72629.66
190	212.31	665.26	79619.48	220	272.32	605.25	72357.34
191	214.07	663.50	79405.41	221	274.59	602.98	72082.75
192	215.86	661.71	79189.55	222	276.88	600.69	71805.87
193	217.66	659.91	78971.89	223	279.19	598.38	71526.68
194	219.47	658.10	78752.42	224	281.51	596.06	71245.17
195	221.30	656.27	78531.12	225	283.86	593.71	70961.31
196	223.14	654.43	78307.98	226	286.23	591.34	70675.08
197	225.00	652.57	78082.98	227	288.61	588.96	70386.47
198	226.88	650.69	77856.10	228	291.02	586.55	70095.45
199	228.77	648.80	77627.33	229	293.44	584.13	69802.01
200	230.68	646.89	77396.65	230	295.89	581.68	69506.12
201	232.60	644.97	77164.05	231	298.35	579.22	69207.77
202	234.54	643.03	76929.51	232	300.84	576.73	68906.93
203	236.49	641.08	76693.02	233	303.35	574.22	68603.58
204	238.46	639.11	76454.56	234	305.87	571.70	68297.71
205	240.45	637.12	76214.11	235	308.42	569.15	67989.29
206	242.45	635.12	75971.66	236	310.99	566.58	67678.30
207	244.47	633.10	75727.19	237	313.58	563.99	67364.72
208	246.51	631.06	75480.68	238	316.20	561.37	67048.52
209	248.56	629.01	75232.12	239	318.83	558.74	66729.69
210	250.64	626.93	74981.48	240	321.49	556.08	66408.20

月度	本金	利息	余额	月度	本金	利息	余额
241	324.17	553.40	66084.03	271	415.81	461.76	54995.46
242	326.87	550.70	65757.16	272	419.27	458.30	54576.19
243	329.59	547.98	65427.57	273	422.77	454.80	54153.42
244	332.34	545.23	65095.23	274	426.29	451.28	53727.13
245	335.11	542.46	64760.12	275	429.84	447.73	53297.29
246	337.90	539.67	64422.22	276	433.43	444.14	52863.86
247	340.72	536.85	64081.50	277	437.04	440.53	52426.82
248	343.56	534.01	63737.94	278	440.68	436.89	51986.14
249	346.42	531.15	63391.52	279	444.35	433.22	51541.79
250	349.31	528.26	63042.21	280	448.06	429.51	51093.73
251	352.22	525.35	62689.99	281	451.79	425.78	50641.94
252	355.15	522.42	62334.84	282	455.55	422.02	50186.39
253	358.11	519.46	61976.73	283	459.35	418.22	49727.04
254	361.10	516.47	61615.63	284	463.18	414.39	49263.86
255	364.11	513.46	61251.52	285	467.04	410.53	48796.82
256	367.14	510.43	60884.38	286	470.93	406.64	48325.89
257	370.20	507.37	60514.18	287	474.85	402.72	47851.04
258	373.29	504.28	60140.89	288	478.81	398.76	47372.23
259	376.40	501.17	59764.49	289	482.80	394.77	46889.43
260	379.53	498.04	59384.96	290	486.82	390.75	46402.61
261	382.70	494.87	59002.26	291	490.88	386.69	45911.73
262	385.88	491.69	58616.38	292	494.97	382.60	45416.76
263	389.10	488.47	58227.28	293	499.10	378.47	44917.66
264	392.34	485.23	57834.94	294	503.26	374.31	44414.40
265	395.61	481.96	57439.33	295	507.45	370.12	43906.95
266	398.91	478.66	57040.42	296	511.68	365.89	43395.27
267	402.23	475.34	56638.19	297	515.94	361.63	42879.33
268	405.59	471.98	56232.60	298	520.24	357.33	42359.09
269	408.96	468.61	55823.64	299	524.58	352.99	41834.51
270	412.37	465.20	55411.27	300	528.95	348.62	41305.56

月度	本金	利息	余额	月度	本金	利息	余额
301	533.36	344.21	40772.20	331	684.13	193.44	22528.08
302	537.80	339.77	40234.40	332	689.84	187.73	21838.24
303	542.28	335.29	39692.12	333	695.58	181.99	21142.66
304	546.80	330.77	39145.32	334	701.38	176.19	20441.28
305	551.36	326.21	38593.96	335	707.23	170.34	19734.05
306	555.95	321.62	38038.01	336	713.12	164.45	19020.93
307	560.59	316.98	37477.42	337	719.06	158.51	18301.87
308	565.26	312.31	36912.16	338	725.05	152.52	17576.82
309	569.97	307.60	36342.19	339	731.10	146.47	16845.72
310	574.72	302.85	35767.47	340	737.19	140.38	16108.53
311	579.51	298.06	35187.96	341	743.33	134.24	15365.20
312	584.34	293.23	34603.62	342	749.53	128.04	14615.67
313	589.21	288.36	34014.41	343	755.77	121.80	13859.90
314	594.12	283.45	33420.29	344	762.07	115.50	13097.83
315	599.07	278.50	32821.22	345	768.42	109.15	12329.41
316	604.06	273.51	32217.16	346	774.82	102.75	11554.59
317	609.09	268.48	31608.07	347	781.28	96.29	10773.31
318	614.17	263.40	30993.90	348	787.79	89.78	9985.52
319	619.29	258.28	30374.61	349	794.36	83.21	9191.16
320	624.45	253.12	29750.16	350	800.98	76.59	8390.18
321	629.65	247.92	29120.51	351	807.65	69.92	7582.53
322	634.90	242.67	28485.61	352	814.38	63.19	6768.15
323	640.19	237.38	27845.42	353	821.17	56.40	5946.98
324	645.52	232.05	27199.90	354	828.01	49.56	5118.97
325	650.90	226.67	26549.00	355	834.91	42.66	4284.06
326	656.33	221.24	25892.67	356	841.87	35.70	3442.19
327	661.80	215.77	25230.87	357	848.89	28.68	2593.30
328	667.31	210.26	24563.56	358	855.96	21.61	1737.34
329	672.87	204.70	23890.69	359	863.09	14.48	874.25
330	678.48	199.09	23212.21	360	870.28	7.29	3.97

附 录 V

完全免除

在 9.9 节中建立的免除方法是为 i 变化很小的情况而设计的。完全免除是对这种方法的推广，它可应用于 i 变化幅度任意的情形。

考虑一项在时刻 k 的负债资金出流 L_k 。基本概念是要持有两项资产，它们在时刻 $k-a$ 提供资金入流 A 而在时刻 $k+b$ 提供资金入流 B, 其中 $a>0$, $b>0$, $a\leq k$ 。这样，一项资产在负债出流之前产生资金入流，而另一项资产在负债出流之后产生资金入流。

假定 A, B, a, b 四个值中恰有两个值是已知的。将利用等价于 i 的利息效力 δ 。由公式 (9.19) 与 (9.20), 用时刻 k 而不是时刻 0 作为比较日期，就得到

$$P(\delta)=Ae^{a\delta}+Be^{-b\delta}-L_k=0$$

及

$$P'(\delta)=Aae^{a\delta}-Bbe^{-b\delta}=0$$

关于两个未知量解这两个方程，就得到了完全免除战略。

现在我们来证明完全免除确实达到了需要的结果。考虑另外一个利息效力 δ' 。我们有

$$\begin{aligned}P(\delta') &= Ae^{a\delta'}+Be^{-b\delta'}-L_k\\&=Ae^{a\delta'}+Be^{-b\delta'}-(Ae^{a\delta}+Be^{-b\delta})\end{aligned}$$

$$= Ae^{a\delta}\left[e^{a(\delta'-\delta)}+\frac{a}{b}e^{-b(\delta'-\delta)}-\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]$$

在上式中已将 $P'(\delta)=0$ 代入公式。

今考察函数

$$f(x)=e^{ax}+\frac{a}{b}e^{-bx}-\left[1+\frac{a}{b}\right].$$

注意 $f(0)=0$ 。微分上式，有

$$f'(x)=a(e^{ax}-e^{-bx})$$

由此可见

$$f'(x)=0 \quad 当 \quad x=0$$
$$f'(x)>0 \quad 当 \quad x>0$$
$$f'(x)<0 \quad 当 \quad x<0$$

这样，对一切 $x\neq 0$ 均有 $f(x)>0$ 。由此可见对一切 $\delta'\neq\delta$ 均有 $P(\delta')>0$ 。这就证明了完全免除的结论。

两个未知量的两个方程可能有也可能没有唯一解。如果两个已知量为： (1) a,b; (2) B,b; (3) A,a; 或 (4) A,b; 则存在唯一解。但如已知量为 (5) a,B; 及 (6) A,B; 则不一定存在唯一解。在后面这两种情形，可能有多重解或无解。

应用完全免除方法需要这样来安排各项资产，使得伴随每一负债资金出流有两项资产资金入流。就象在常规的免除理论中那样，常需要频繁地对整批资产进行再平衡。

请读者验证，在例 9.7 中完全免除产生与常规免除相同的战略。

附　录　VI

年金方差的推导

需要确定和式

$$s = x_1 + x_1x_2 + \cdots + x_1x_2\cdots x_n$$

的方差，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是独立同分布的随机变量。对于 $a_{\overline{n}|}$ 的公式 (3.34) 和对于 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 的公式 (3.36) 都是这种形式。

设 m_1 和 m_2 为关于原点的一阶和二阶矩，即

$$E[x_k] = m_1 及 E[x_k^2] = m_2$$

对于 $k = 1, 2, \cdots, n$ 。由独立性可知

$$E[s] = \sum_{k=1}^{n} m_1^k$$

我们将它记为 $s_n(m_1)$ 。

希望证明的公式是

$$\mathrm{var}[s] = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} s_n(m_2) - \frac{2m_2}{m_2 - m_1} s_n(m_1) - [s_n(m_1)]^2$$

此式由数学归纳法来证明。

设 $n = 1$, 我们知道

$$\mathrm{var}[s] = \mathrm{var}[x_1] = m_2 - m_1^2.$$

而要证明的公式的右端是

$$\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}m_2-\frac{2m_2}{m_2-m_1}m_1-m_1^2=m_2-m_1^2.$$

因此，公式对 $n=1$ 成立。

设公式对 $n-1$ 成立，定义

$$t=x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}$$

就有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[s] &= \mathrm{var}[t+x_1x_2\cdots x_n]\\ &= \mathrm{var}[t]+\mathrm{var}[x_1x_2\cdots x_n]+2\mathrm{cov}[t,x_1x_2\cdots x_n].\end{aligned}$$

现在来演算这三项。

由归纳法假设

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[t] &= \frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}s_{n-1}(m_2)-\frac{2m_2}{m_2-m_1}s_{n-1}(m_1)-[s_{n-1}(m_1)]^2\\ &= \frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}(m_2+m_2^2+\cdots+m_2^{n-1}) \qquad (A)\\ &\quad -\frac{2m_2}{m_2-m_1}(m_1+m_1^2+\cdots+m_1^{n-1}) \qquad (B)\\ &\quad -(m_1+m_1^2+\cdots+m_1^{n-1})^2 \qquad (C)\end{aligned}$$

由独立性

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[x_1x_2\cdots x_n] &= m_2^n-m_1^{2n}\\ &= \underbrace{\frac{m_2^{n+1}-m_2^nm_1}{m_2-m_1}}_{(D)}-\underbrace{m_1^{2n}}_{(E)}\end{aligned}$$

至于协方差项应有

$$2\mathrm{cov}[t,x_1x_2\cdots x_n]=2E[tx_1x_2\cdots x_n]-2E[t]E[x_1x_2\cdots x_n]$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(m_2 m_1^{n-1} + m_2^2 m_1^{n-2} + \cdots + m_2^{n-1} m_1) \\
&\quad -2(m_1 + m_1^2 + \cdots + m_1^{n-1}) m_1^n \\
&= 2 \cdot \frac{m_2^n m_1 - m_1^n m_2}{m_2 - m_1} - 2m_1^n (m_1 + m_1^2 + \cdots + m_1^{n-1}) \\
&= \underset{(F)}{\frac{2m_1 m_2^n}{m_2 - m_1}} - \underset{(G)}{\frac{2m_1^n m_2}{m_2 - m_1}} - \underset{(H)}{2m_1^n (m_1 + m_1^2 + \cdots + m_1^{n-1})}
\end{aligned}
$$

需要证明三项的和给出归纳法假设。读者可以验证 $(A)+(D)+(F)$ 给出待证明公式中的第一项，$(B)+(G)$ 给出第二项，而 $(C)+(E)+(H)$ 则给出第三项。

至此完成了数学归纳法证明。

附 录 Ⅶ

Black -Scholes 公式的推导

设 S_t 是一个随机变量，它表示一项资产在时刻 t 的值，其中 $S_0 = S$ 。设 $f_t(x)$ 是 S_t 的概率密度函数。

于是在 10.5 节中定义的欧洲看涨期权的值由下式给出：

$$C = e^{-\delta n}\int_E^{\infty}(x-E)f_n(x)dx$$

这是因为看涨期权的值等于在到期日资产价格超过履行价部分的期望现时值 (但不小于零) 。

假设 $1+i_t$ 服从对数正态分布。则 $\log_e(S_n/S)$ 服从平均值 $=n\mu$ 及方差 $=n\sigma^2$ 的正态分布。由对数正态分布有

$$E[S_n/S] = e^{n(\mu+\sigma^2/2)}$$

及

$$f_n(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{[\log_e(x/S)-n\mu]^2}{2n\sigma^2}}.$$

也假设在时刻 0 的资产值等于其期望现时值

$$S = E[e^{-\delta n}S_n] = e^{-\delta n}Se^{n\mu+n\sigma^2/2}$$

或

$$1 = e^{-\delta n+n\mu+n\sigma^2/2}.$$

这意味着 $\mu = \delta - \sigma^2/2$ 。

合并这些结果就有

$$C = e^{-\delta n}\int_E^{\infty}\frac{x-E}{x\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{[\log_e(x/S)-n(\delta-\sigma^2/2)]^2}{2n\sigma^2}}dx$$

今由变量变换来计算此积分。令

$$y = \frac{\log_e(x/S)-n(\delta-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{n}}$$

故

$$dy = \frac{1}{x\sigma\sqrt{n}}dx$$

及

$$x = Se^{[n(\delta-\sigma^2/2)+y\sigma\sqrt{n}]}$$

设变量变换后的下限为 F, 以致

$$E = Se^{[n(\delta-\sigma^2/2)+F\sigma\sqrt{n}]}$$

或

$$F = \frac{\log_e(E/S)-n(\delta-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

这样，经变量变换后有

$$\begin{aligned} C &= e^{-\delta n}\int_F^{\infty}\frac{Se^{[n(\delta-\sigma^2/2)+y\sigma\sqrt{n}]}-E}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\ &= S\int_F^{\infty}\frac{e^{-(y-\sigma\sqrt{n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy - Ee^{-\delta n}\int_F^{\infty}\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy \end{aligned}$$

然而，第一个积分是标准正态分布中 $F-\sigma\sqrt{n}$ 右方的面积，或 $-F+\sigma\sqrt{n}$ 左方的面积。类似地，第二个积分是 F 右方的面积或 $-F$ 左方的面积。

这样，如将标准正态分布的累积分布函数记为 N, 则有

$$C = SN(-F+\sigma\sqrt{n}) - Ee^{-\delta n}N(-F)$$

今设

$$d_1 = -F + \sigma\sqrt{n} = \frac{\log_e(S/E) + n(\delta - \sigma^2/2) + \sigma^2 n}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\log_e(S/E) + n(\delta + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{n}}$$

及

$$d_2 = -F = \frac{\log_e(S/E) + n(\delta - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{n}}$$

由此得出

$$C = SN(d_1) - Ee^{-\delta n}N(d_2)$$

这就是 Black -Scholes 公式。

习题答案

第一章

1. a) $\frac{1}{3}(t^2+2t+3)$ c) $2n+1$

3. a) $\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}t(t+1)$ b) $2(2^n-2^t)$

4. \$300

5. a) 1/24 b) 1/29

6. a) 0.1 b) 0.1

8. \$1190.91

9. a) 9.2% b) $3\frac{1}{3}$ 年

11. \$582.50

12. 16

14. \$3456

15. $\frac{i-j}{1+j}$

16. $c-a-b$

17. 1.523

18. $\frac{A(n-1)}{A(n)}$

19. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

21. \$3281.25

22. \$2800

23. a) 1/15 b) 1/6

28. a) $4\left[1-\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{-3/4}\right]$ b) $6\left[\left(1-\frac{d^{(2)}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]$

29. $(1+mi^{(1/m)})^{1/m}=(1-pd^{(1/p)})^{-1/p}$

30. a) $100(1.015)^8$ b) $100(0.76)^{-0.5}$

33. 8

34. 20

35. r^{-4}

38. $d < d^{(m)} < \delta < i^{(m)} < i$

40. a) $\log_e a + 2t\log_e b + c^t \log_e c \log_e d$ b) 公式 (1.25)

42. 5

43. 14/205

44. $\frac{\log_e i + \log_e \delta}{\delta}$

45. $e^{0.01} - 1$

46. $e^{0.038}$

47. $.804264^{-1/3} - 1$

48. a) $(1+r)^{n(n+1)/2}(1+i)^n$ b) $(1+r)^{n+1)/2}(1+i) - 1$

49. .82

50. $e^{0.3}$

51. $2/n$

52. 9.48%

53. b) $\frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} + \frac{\delta^7}{7!} + \cdots$

55. a) $(1+i)^{-2}$ b) $(1+i)^{-1}$ c) $(1-d)^{(1-m)/m}$

d) $-v^{-1}$ e) $e^{-\delta}$

56. a) $d + d^2 + d^3 + d^4 + \cdots$

b) $i - i^2 + i^3 - i^4 + \cdots$

c) $1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \frac{\delta^3}{3!} + \cdots$

d) $i - \frac{m-1}{2!m} i^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{3!m^2} i^3 - \cdots$

e) $d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \cdots$

59. a) (1) $e^{at+bt^2/2}$ (2) $e^{(a-b/2)+bn}$

b) (1) $e^{a(b^t-1)/\log_e b}$ (2) $e^{a(b-1)b^{n-1}/\log_e b}$

第二章

1. \$10402.36

2. a) \$4225.27 b) \$4225.46

3. $\frac{\log_e \delta - \log_e d}{\delta}$

4. 120/121

5. a) 1340　　b) 1321

6. a) $101.92　　b) $100.00　　c) $103.33

7. c) 投资于 2 月份

8. $1593.00

9. $917.76

10. $483.11

11. a) $275　　b) $260

12. $\frac{1}{\delta}[\log_e(s_1+s_2+\cdots+s_n)-\log_e(s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n})]$

13. 36.4 期

14. 6.25 年

15. $\frac{2n^2+n}{3}$

16. 114

17. .30

18. $144\log_e 1.01$

19. 7.46%

20. $\frac{\sqrt{19}-4}{3}$

21. 1.5%

22. $\frac{\log_e 2}{50}$

23. 4%

25. a) 16%　　b) 17.74%

26. a) 1.0124　　b) 0.9938

27. a) 7.00%　　b) 7.71%　　c) 7.53%

28. $1540.34

29. 14.80%

30. 14.264 年

31. $690.30

32. $17936

33. $700

第三章

1. \$651.72

2. \$1489.36

3. $n^2\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]$

4. $\frac{2x-y}{x^2+2x-y}$

7. 8.3%

9. \$2389.72

10. \$8102

11. 5.695

17. a) \$3256.88 b) \$5403.15 c) \$6959.37

19. 1.8

20. 7%

21. $x=4$ $y=7$ $z=4$

22. $a_{\overline{45}|}$

23. \$16178

24. $1-\frac{\log_e iP}{\delta}$

25. $1000[(1+i)^{30}-(1+i)^{10}]$

26. 4

27. 30/49

28. $\frac{k(k-1)}{2}i+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}i^2+\cdots$

29. a) 4.5195 b) 4.5230 c) 4.5160

30. a) $-s_{\overline{n}|}$ b) $-a_{\overline{n}|}$

32. \$146.07 在时刻 21

33. $n=9$, \$32.41

34. 9

35. 14

36. 29

38. $\frac{4\sqrt{2}-5}{7}$

41. 6.71%

42. 8.7%

43. a) 8.145　　b) 8.230

44. $\frac{(1+i)^{1/2}P}{1+2a_{\overline{4}|i}+2(1+i)^{-4}a_{\overline{5}|j}}$

45. $\sum_{t=9}^{28}\frac{11}{t}$

46. $n-\frac{1}{2}n(n+1)d$

47. $\log_2(n+1)$

48. 14.5

49. .0018

51. $\frac{1000}{4a_{\overline{20}|}-a_{\overline{15}|}-a_{\overline{10}|}-a_{\overline{5}|}}$

52. \$6000

53. \$980

54. $\frac{s_{\overline{41}|}-s_{\overline{15}|}-26}{i}$

第四章

1. \$35824

2. \$11466

3. 6%

4. \$35825

5. a) $\frac{200}{s_{\overline{4}|}}(a_{\overline{176}|}-a_{\overline{32}|})$　　b) $\frac{200}{a_{\overline{4}|}}(a_{\overline{180}|}-a_{\overline{36}|})$

8. $300\frac{1-(0.9925)^{120}}{1-(0.9925)^{6}}$

9. 20%

10. $100\frac{1-e^{-0.4}}{1-e^{-0.02}}$

11. 1.95

12. $\frac{1-v^{48}}{1-v^{4/3}}$

13. \$11466

18. $\frac{i^{(2)}}{d^{(12)}}a_{\overline{n}|}^{(2)}$

20. $\frac{\log_e 20[1-(1-d)^{0.5}]}{\log_e(1-d)}$

21. 1/30

22. $\frac{1-v^{36}}{1-v^{3/4}}$

23. $1-\frac{1}{\delta}\log_e\frac{i}{\delta}$

25. $\log_e(n+1)$

26. 27.47 年

27. 1/6

30. $6a_{\overline{20|}}+\frac{a_{\overline{20|}}-20v^{20}}{i}$

33. $a_{\overline{n|}}/d$

34. 66

35. 1/21

36. $6250-325A$

37. \$16607

38. \$7851

40. a) 3 b) 25/12

43. 48

45 112.59

46. 3

47. 156.25

48. $\frac{1}{\delta_i-\delta_k}$

49. a) $\int_0^n(n-t)v^t dt$ b) $\frac{n-\bar{a}_{\overline{n|}}}{\delta}$

50. 16020

51. 84.5

52. a) (2) $-\frac{n(n+1)}{2}$ b) (2) $-\frac{n^2}{2}$

54. 40

55. a) $\frac{n(1+i)-2\ddot{a}_{\overline{n|}}+nv^n}{i^2}$ b) $\frac{\frac{i}{2}n(n+1)-n+a_{\overline{n|}}}{i^2}$

58. a) $\frac{q}{p-q}$ b) $\frac{2q}{p-q}$

60. $\frac{a^3}{(2a-b)^2}\left[2a-b-(b-a)\log_e\frac{a}{b-a}\right]$

第五章

1. a) $1000(a_{\overline{9|}}+4a_{\overline{1|}}+10)$

b) $1000[2(a_{\overline{10|}}-a_{\overline{5|}})+(Ia)_{\overline{10|}}-(Ia)_{\overline{5|}}]$

2. 3

3. \$20206

4. a) 75.05 b) -57.85

5. $i_{s+1} = i_s + \frac{\sum_{t=0}^{n} v_s^t R_t}{\sum_{t=1}^{n} t v_s^{t+1} R_t}$

6. a) 3 b) 是

7. .02

9. 任意 $0 < x < 100$ 都可

11. 6.16%

12. \$4448

14. \$8439

15. 9.78%

16. \$943

17. a) $\frac{ti}{1+(1-t)i}$ b) $\frac{(1-t)i}{1+ti}$

20. $\int_0^n C_t dt$

21. a) 是 b) 否

22. a) 15.38% b) 没有 7 月 1 日基金余额

23. a) 6.52% b) 9.54%

24. b) $\frac{C-A-D}{A+\frac{1}{2}D}$ 及 $\left[\frac{B}{A}\right]\left[\frac{C}{B+D}\right]-1$

c) $\frac{C-A-D}{A+\frac{1}{2}D}$ 及 $\left[\frac{B-D}{A}\right]\left[\frac{C}{B}\right]-1$

25. 6.5708

26. 9.47%

27. a) $\frac{\partial}{\partial t}\log_e a(s,t)$ b) $e^{\int_s^t \delta_{s,r} dr}$ c) $a(t)/a(s)$
    d) $(1+i)^t$ e) 1

28. 拒绝

29. 付现款

30. b) 图形不通过 x 轴

31. a) 12.07% b) 是

32. 14.8%

33. \$3870

34. 减少 39.7%

35. 两种途径等价

36. \$1167

37. 9 月 1 日

38. $(n+1)^2$

第六章

1. \$635.32

2. \$4918

3. \$16514

4. a) $1000(2a_{\overline{8}|}+a_{\overline{3}|})$

b) $1000[(2a_{\overline{15}|}+a_{\overline{10}|}+a_{\overline{5}|})(1+i)^7-(4s_{\overline{7}|}-s_{\overline{2}|})]$

5. \$10814

6. \$17143

7. $20000\frac{a_{\overline{15}|}(1+i)^2}{a_{\overline{20}|}a_{\overline{13}|}}$

10. \$641.86

11. $a_{\overline{n}|}-nv^{n+1}$

13. 第 13 次

14.\$724.59

15. a) $i(a_{\overline{6}|i}+v_i^6a_{\overline{10}|j})$ b) v_j^6

16. a) $(K-Ai)(1+i)^{t-1}$ b) 是

18. a) $.4L$ b) $.9L$

19. \$72

20. a) \$1000 b) \$500 c) \$600 d) \$900 e) \$5900

23. \$676.43

24. \$7610

25. \$2221

26. a) \$229.87 b) \$229.62

28. $\frac{10000/[a_{\overline{10}|0.08}+(1.08)^{-10}a_{\overline{10}|0.07}]}{1+0.09[s_{\overline{10}|0.06}(1.05)^{10}+s_{\overline{10}|0.05}]}$

29. 以下年金符号均按利率 j:

a) i b) $1/s_{\overline{n}|}$ c) $js_{\overline{t-1}|}/s_{\overline{n}|}$ d) $s_{\overline{t}|}/s_{\overline{n}|}$ e) $1-s_{\overline{t}|}/s_{\overline{n}|}$

f) $i-js_{\overline{t-1}|}/s_{\overline{n}|}$ g) $(1+j)^{t-1}/s_{\overline{n}|}$

30. \$6184

31. \$14523

32. \$1344.89

33.\$156

37. \$78.20

38. \$908.87

40. a) \$1287.76 b) \$276.24

41. 13

42. 4%

43. 2.8658

45. a) $K\overline{a}_{\overline{n-k}|}+(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n-k}|}$

b) $(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n}|}(1+i)^k-(\overline{I}\overline{s})_{\overline{k}|}$

46. a) 0.5 b) 0.375

47. (6:14): $L=B_0=\int_0^n e^{-\int_0^s \delta_r dr}R_s ds$

(6:15): $B_t^p=\int_t^n e^{-\int_t^s \delta_r dr}R_s ds$

(6:16): $B_t^r=B_0 e^{\int_0^t \delta_r dr}-\int_0^t R_s e^{-\int_s^t \delta_r dr}ds$

48. a) $\alpha\beta e^{-\beta t}$ b) α c) $\frac{\alpha\beta}{\beta+\delta}$ d) $\frac{\alpha\beta}{\beta+\delta}e^{-\beta t}$

49. \$310

50. a) \$79.59 b) (1) 15 (2) $1\frac{2}{3}\%$

51. \$272.42

54. \$5736

55. a) \$757.19 b) \$826.40

56. $R\frac{a_{\overline{30}|0.10}-a_{\overline{15}|0.09}}{a_{\overline{20}|0.09}-a_{\overline{15}|0.09}}$

57. a) $\frac{(80000/a_{\overline{20}|0.08})a_{\overline{11}|0.08}-5000}{a_{\overline{9}|.09}}$

b) $\frac{80000(1.09)^9-(80000/a_{\overline{20}|0.08})s_{\overline{9}|0.09}-5000}{a_{\overline{9}|0.09}}$

58. \$571

第七章

1. a) \$385.54 b) \$422.41 c) 9.56%

2. \$844.77

3. a) 7.91% b) 8.51%

4. 1.0336

5. \$115.87

6. a) 8.40% b) 8.00% c) 9.14% d) 10.00%

7. a) -7.72% b) -12.46%

8. \$794.83

9. \$945

10. \$1200

11. \$1291

12. \$1100

16. $1-0.5p$

17. \$20

18. \$33.98

19. \$573.60

20.

a)	b)
1037.17	964.54
1027.88	973.41
1018.59	982.27
1009.29	991.14
1000.00	1000.00

24.

	$B_{1/3}^f$	$Fr_{1/3}$	$B_{1/3}^m$
理论	980.35	13.12	967.23
实际	980.62	13.33	967.29
半理论	980.35	13.33	967.02

25. a) 理论 $=$ 半理论 $<$ 实际

 b) 半理论 $<$ 理论

半理论 $<$ 实际

实际 $\lesseqgtr$ 理论

27. 8.6446%

28. 8.0420%

29. 8.4%

30. 9.13%

31. a) \$1148.77 b) \$846.28

32. 10.52%

33. \$1086

34. \$922.05

35. \$58.65

36. \$10944.55

37. \$7057.25

38. $80000 + 2000\left[\frac{3a_{\overline{46}|} - a_{\overline{40}|} - a_{\overline{28}|} - a_{\overline{10}|}}{a_{\overline{6}|}}\right]$

39. $110400 - 800(5a_{\overline{16}|0.05} - 2a_{\overline{4}|0.05})$

42. \$1153.21

43. $A = 105i^{(2)} - 8 \qquad B = 8$

44. $1000v^{80} + \frac{40a_{\overline{80}|} + 10a_{\overline{40}|}}{s_{\overline{4}|}}$ 按利率 $\frac{i^{(4)}}{4}$

45. a) $100v^6 i + 6 - a_{\overline{6}|}$ b) $a_{\overline{6}|} - 100v^6 i$

47. 无限

48. \$17.14

49. \$33.81

50. 15.7%

51. $E\sum_{t=1}^{\infty}\left[p_t\prod_{r=1}^{t}\left(\frac{1+k_r}{1+i_r}\right)\right]$

52. a) \$2050000 b) \$2000000 c) \$2150000

 d) \$2096200

54. $K' = v^{25}$ $C' = v^{10}$

55. $100e^{-12\delta} + 9\frac{1-e^{-12\delta}}{\delta}$

56. $A = 3$ $B = -2$

57. 11 年

58. \$1490.54

第八章

1. a) 14.75% b) 14.65%

2. 34.49%

3. \$205.77

4. A: 16.38% B: 12.00%

5. $Y < Z < X$

6. a) \$2692.83 b) \$2660.00

7. a) \$11550 b) \$11500

8. a) 38.2% 及 261.8% b) 30%

10. \$4043.45

11. 9.17%

13. \$16787

14. 9.14%

15. \$13752

16. a) \$8318 b) 是

17. \$11164

18. \$92988

22. a) \$764 b) \$872 c) \$800 d) \$822.15

23. \$5

24. 14.7%

25. 14.3%

26. 4.31

30. a) (1) \$1340.10 (2) \$1000.00 (3) \$250.00
    b) (1) \$11408.52 (2) \$10000.00 (3) \$6875.00

31. $177.09

32. $5253

33. $2216.14

34. 50

35. $n\frac{\log_e(1-S/A)-\log_e[-\log_e(S/A)]}{\log_e(S/A)}$

36. 15 或 44

37. a) $1715.54 b) $34311

38. 4.61%

39. $42.70

40. $4.61

41. $365.63

42. $116500

43. 31.33%

44. $\frac{7+4m}{50m}$

第九章

1. 1.00

2. .82

3. 12.9%

4. 116.8%

5. a) $25633 b) $23736 c) $16658

6. a) 选择 A b) 选择 B

7. 8.07%

8. $767.55

9. a) 720 b) 240

10. 13.89%

11. .00685

12. b) c c) $1-e^{-c}$ d) $1-e^{-cn}$

13. a) 1161400 b) 16600 c) 7.77%

14. a) $141500 b) $128300

15. 7.91%

16. a) \$946.93 b) \$1036.53 c) 7.975% d) 7.953%
    f) 是

17. a) \$857.34 b) \$1000.00

18. 6.4646

19. a) 9.64% b) 10.51%

20. 26.45%

21. 最小 = \$128614
最大 = \$129470

22. $-\frac{1}{\delta}\log_e\left[\frac{(v+2v^2)a_{\overline{20}|}}{30a_{\overline{2}|}}\right]$

24. 27

25. $\frac{v(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$

28. a) \$3616 b) 2.2035 c) 1.7628 d) 0.6046

30. \$1591

32. $a(i) = v^2$ $b(i) = \overline{v}(\overline{v} + v)$

33. a) (1) -1.8012 (2) 0 (3) 1.8343
    b) (1) 1.8854 (2) 0 (3) -1.7531

34. a) 0 b) 94.307 c) 312.5

35. $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)$

36. 1250

38. 投资 \$13223 于 1 年期无息票债券
    投资 \$15061 于 3 年期无息票债券
    投资 \$9624 于 5 年期无息票债券

39. 投资 \$9091 于 1 年期无息票债券
    投资 \$8265 于 2 年期无息票债券
    投资 \$7513 于 3 年期无息票债券
    投资 \$6830 于 4 年期无息票债券
    投资 \$6209 于 5 年期无息票债券

40. a) \$179.37 b) 12.01%

41. a) $0 < p_1 < .6980$ b) 不存在解

42. a) $.2186 < p_1 < .5931$ b) 不存在解

第十章

3. a) 所有各年 8% b) 第 1 年 0; 第 2 年 .01; 第 3 年 $.01\sqrt{2}$

c) \$1294.92 d) \$1224.94 e) \$1259.71

f) \$1259.82 g) 26.08

4. a) 0.07997 b) 0.79390 c) 0.16630 d) 0.00735

5. 平均值 =2.5772

标准差 =0.0169

6. a) 平均值 =1.823 b) 平均值 =14.121

c) 平均值 =0.549 d) 平均值 =7.298

标准差 =0.058 标准差 =0.295 标准差 =0.017 标准差 =0.134

7. $\delta_{[6]} = 0.0896$

$\delta_{[6]} = 0.0880$

$\delta_{[6]} = 0.0867$

9. .0001513

10. a) 0.0004762 b) 0.0001300

11. a) 0.092 b) 0.0000512

13. a) 1.869 b) 2.468 c) 0

14. \$2.10

15. a) 14% b) 是 c) 11.67%

16. 1.485

17. a) 3% b) 1/3

18. a) \$200 b) 第 1 年 \$105; 第 2 年 \$110.25

20. \$11.00

21. a) 0 b) $S - Ee^{-\delta n}$ c) S d) 0

e) $S - E$, 若 $S \geq E$; 0 若 $S < E$ f) S

22. a) 5.76 b) 16.73 c) 8.66 d) 12.58 e) 5.16

f) 15.82 g) 5.51 h) 14.88

23. $8.80

24. $97.99

符号汇编

符号	节	意义
a	6.8	含级率本金金额的分期偿还中的超限时期
$a(t)$	1.2	积累函数
$a^{-1}(t)$	1.6	贴现函数，现时值函数
$a_{\overline{n}\vert}$	3.2	一项 n 个时期延付年金的现时值
$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	3.3	一项 n 个时期初付年金的现时值
$a_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	4.4	一项 n 个时期每 $\frac{1}{m}$ 时期支付一次延付年金的现时值
$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	4.4	一项 n 个时期每 $\frac{1}{m}$ 时期支付一次初付年金的现时值
$\overline{a}_{\overline{n}\vert}$	4.5	一项 n 个时期连续年金的现时值
$a_{\overline{n}\vert i\&j}$	6.4	一项 n 个时期收益率与偿债基金利率不同的延付年金现时值
$a_{\overline{\infty}\vert}$	3.5	一项延付永久年金的现时值
$\ddot{a}_{\overline{\infty}\vert}$	3.5	一项初付永久年金的现时值
A	5.5	年初基金金额
	8.5	需减值的资产的现时值
$A(t)$	1.2	金额函数
A_t	9.9	由资产形成的资金入流
B	5.5	年末基金金额
B_t	5.3	未偿还投资余额

	6.3	未偿还贷款余额
	7.4	债券的帐面值
B'_k	5.6	时刻 t_k 的未偿还投资余额
B_t^p	6.2	将来贷款余额
B_t^r	6.2	过去贷款余额
B_{t+k}^f	7.5	债券的无息价格
B_{t+k}^m	7.5	债券的市场价格
B^c	10.5	通知偿还债券的值
B^{nc}	10.5	非通知偿还债券的值
$\bar{c}$	9.9	凸性
C	7.3	债券的偿还值
	10.5	看涨期权的值
C_d	10.6	若股票跌价看涨期权的值
C_t	5.2	投入，存入
C'_k	5.6	时刻 t_k 的投入，存入
C_m	7.8	分期偿还债券的偿还值
C_u	10.6	股票上涨时看涨期权的值
C'	7.8	分期偿还债券偿还值的和
$\mathrm{cov}[X,Y]$	10.3	随机变量 X 与 Y 的协方差
d	1.7	实质贴现率
	1.7	单贴现率
	1.7	复贴现率
	8.5	减值的下降结欠方法中的因子
d'	8.5	减值的变形下降结欠方法中的因子
$\bar{d}$	9.8	持续期限， Macaulay 持续期限
d_n	1.7	从时刻 $n-1$ 到时刻 n 的实质贴现率
$d^{(m)}$	1.8	每 $\frac{1}{m}$ 时期支付一次的名义贴现率
d_1, d_2	10.5	Black —Scholes 公式中的常数
D	6.4	偿债基金储蓄

	7.10	股票的分红
D_t	8.5	减值费
D_1, D_2	2.3	日期的天数
$(Da)_{\overline{n\|}}$	4.6	递减年金的现时值
$(Ds)_{\overline{n\|}}$	4.6	递减年金的积累值
e	10.4	需用以支撑负债的抵押资产净值的度量
$e(t)$	10.3	AR(1) 和 AR(2) 过程中的误差项
E	10.5	期权的履行 (成交) 价
$E[X]$	10.2	随机变量 X 的期望
EPV	9.5	期望现时值
f	5.9	项目借贷率
	9.6	今后率
$f(x)$	3.8	用迭代法解的方程中函数
F	7.3	面额，债券的面值
F_n	4.6	在时刻 n 单次付款的现时值
F_r	7.3	债券息票
Fr_k	7.5	应计债券息票
g	7.3	债券的修正息票率
$g(x)$	3.8	迭代公式
g_1, g_2	10.3	AR(2) 过程特征方程的根
G	7.3	债券的基价
G_n	4.6	在时刻 n 开始的等额永久年金的现时值
H	8.6	一项资产的周期费
H_n	4.6	时刻 n 开始的递增永久年金的现时值
i	1.3	实质利率
	1.4	单利利率
	1.5	复利利率
	5.2	收益率，内返回率
	5.4	投资率，其时 j 是再投资率

	6.4	偿债基金方法中的贷款利率
	8.2	年百分率 (APR)
	9.4	表面利率
i'	8.3	不动产抵押中的开价年利率
	9.4	真实利率
i_n	1.3	从时刻 $n-1$ 到时刻 n 的实质利率
i_s	3.8	迭代中的逐次 i 值
i_t	9.6	收益曲线中的现时利率 (现率)
i^y	5.7	日历年 y 的组合利率
i_t^y	5.7	日历年 y 中对第 t 个投资年的投资年利率
${}_ai_b$	5.5	在时刻 b 投资 1 在随后的长度为 a 的时期内所得利息金额
$i^{\max}$	8.4	用最大收益方法的近似收益率
$i^{\min}$	8.4	用最小收益方法的近似收益率
i^{cr}	8.4	用常数比例方法的近似收益率
i^{dr}	8.4	用正比例方法的近似收益率
$i^{(m)}$	1.8	每 $\frac{1}{m}$ 时期转换一次的名义利率
I	5.5	时期内所得利息金额
I_t	1.2	基金中得到的利息金额
	6.3	贷款中支付的利息金额
	7.4	债券得到的利息金额
$\bar{I}_t$	6.7	利息支付时的瞬时利率
$(Ia)_{\overline{n}\rvert}$	4.6	递增年金的现时值
$(Is)_{\overline{n}\rvert}$	4.6	递增年金的积累值
$(Ia)_{\overline{\infty}\rvert}$	4.6	递增永久年金的现时值
$(I_{\overline{m}\rvert}a)_{\overline{n}\rvert}$	4.6	n 个时期的递增年金的现时值，其中有 m 个时期有增长， $m<n$
$(Ia)_{\overline{n}\rvert}^{(m)}$	4.7	n 个时期的递增年金的现时值，其中每 $\frac{1}{m}$ 个时期付款一次，付款额每时期增长

		一次
$(I^{(m)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	4.7	n 个时期的递增年金的现时值，其中每 $\frac{1}{m}$ 时期付款一次，付款额每 $\frac{1}{m}$ 个时期增长一次
$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}\vert}$	4.8	连续支付的连续增长年金现时值
j	各章节	利率， i 的另一种记号
	5.4	再投资率，其时 i 为投资率
	6.4	偿债基金利率
	8.2	用以决定 APR 的周期率
	10.2	由 $1+j=E[(1+i_t)^2]$ 决定的利率，用以计算方差
j'	8.3	不动产抵押中的月度利率
j_k	5.6	时间加权方法计算中的区段收益率
k	各章节	几个公式中的常数，求和的指标
	1.2	积累函数和金额函数之间的比例常数
	3.7	年金中的分数项
	3.8	迭代中所用的 $a_{\overline{n}\vert}$ 或 $s_{\overline{n}\vert}$ 的值
	4.6	年金付款按几何级数变化时的变化率
	5.5	发生净投入的平均时刻
	7.6	计算债券收益时所用的 $(P-C)/C$
	10.2	在计算方差时由 $(1+k)^{-1}=E[(1+i_t)^{-2}]$ 定义的一个利率
	10.3	AR(1) 过程中的常数
k_1, k_2	10.3	AR(2) 过程中的常数
K	7.3	债券偿还值的现时值
	8.2	资金筹措费
	8.6	核定成本
K_m	7.8	分期偿还债券偿还值的现时值
K'	7.8	分期偿还债券偿还值的现时值的和

L	6.2	原始贷款余额
	10.6	复制交易中贷款金额
L'	6.8	含级率本金金额的分期偿还中贷款余额的起划分作用的金额
L^*	8.3	按借贷忠诚目的计算的不动产抵押借贷金额
L_t	9.9	由负债形成的资金出流
m_1	附录Ⅵ	关于原点的一阶矩
m_2	附录Ⅵ	关于原点的二阶矩
m_1^s	10.2	$1+i_t$ 关于原点的一阶矩
m_2^s	10.2	$1+i_t$ 关于原点的二阶矩
m_1^a	10.2	$(1+i_t)^{-1}$ 关于原点的一阶矩
m_2^a	10.2	$(1+i_t)^{-1}$ 关于原点的二阶矩
M	8.6	周期维修费
M_1, M_2	2.3	日期中的月数
n	各章节	交易的项数
N	10.5	标准正态分布的累积分布函数
p	7.4	\$1 债券的溢价或折扣
	9.5	债券不违约的概率
p_t	9.5	债券在时刻 t 不违约的概率
p_1, p_2	9.10	资产 / 负债匹配中基金对不同项目投资的比例
P	7.3	债券价格
	10.5	看跌期权的价格
P_m	7.8	分期偿还债券的价格
P'	7.8	分期偿还债券价格之和
P_t	6.3	偿还贷款本金的金额
	7.4	债券本金调整的金额
$\overline{P}_t$	6.7	本金偿还的瞬时率
$P(i)$	5.2	净现时值

$P(i_*)$	9.6	基于现率的净现时值
q	9.5	债券违约概率
Q	8.3	必须反映在 APR 中的不动产抵押转帐费用
r	5.9	项目投资率
	7.3	债券的息票率
	9.4	通货膨胀率
	10.4	CAPM 中的收益率
r_e	10.4	抵押资产净值的收益
r_f	10.4	无风险利率
r_k	10.4	某一特定证券的收益率
r_l	10.4	用以贴现负债的相应利率
r_p	10.4	市场组合中的收益率
R	4.3	每一利息转换时期的等价付款
	6.3	偿还贷款的等额分期付款
	8.5	等额周期返回值
R_t	5.2	返回，抽回
	6.6	偿还贷款的等额分期付款
	9.9	免除中的净收入
s	附录Ⅵ	年金的和
s^2	10.2	利率的方差
s_1, s_2	9.10	资产 / 负债匹配中不同时刻的抽回金额
$s_{\overline{n}\vert}$	3.2	延付年金 n 个时期的积累值
$\ddot{s}_{\overline{n}\vert}$	3.3	初付年金 n 个时期的积累值
$s_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	4.4	$\frac{1}{m}$ 时期支付一次的延付年金 n 个时期的积累值
$\ddot{s}_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	4.4	$\frac{1}{m}$ 时期支付一次的初付年金 n 个时期的积累值
$\bar{s}_{\overline{n}\vert}$	4.4	连续年金 n 个时期的积累值
$s_n(m_1)$	附录Ⅵ	年金和的期望值

S	8.5	减值后资产的残值
	10.5	当前股票价格
S_r	8.4	头上 r 个正整数的和
S_t	附录Ⅷ	资产值的随机变量
t	各章节	在许多公式中表示时间的一个指数
$\bar{t}$	2.6	等时间方法中付款时间的加权平均
U	8.6	每单位时间里生产的物件数
v	1.6	贴现因子，现时值因子
$\bar{v}$	9.8	单位变化率，修正持续期限
V	10.4	CPAM 中的现时值
$\mathrm{var}[X]$	10.2	随机变量 X 的方差
W	10.4	CPAM 中的不确定资金流
W'	10.4	CAPM 中等价的资金流 (调整为确定性)
Y_1, Y_2	2.3	日期中的年数
α	10.3	均匀分布中区间的一半
β_k	10.4	CPAM 中系统风险的度量
δ	1.9	利息效力
δ'	1.9	贴现效力
$\delta_{[t]}$	10.2	从时刻 $t-1$ 到时刻 t 的利息效力
Δ	附录Ⅲ	差分因子
ε	9.9	Taylor 级数中的增量
λ	10.4	风险的市场价格
μ	10.2	分布的平均值，对数正态分布的参数
ξ	9.9	Taylor 级数中最后一项的增量
Π	各章节	乘积
σ^2	9.8	分布的方差，对数正态分布的参数
$\sum$	各章节	和式
τ	10.3	AR(2) 过程中的常数

汉英名词对照

一　画

一阶自回归过程	autoregressive process §10.3 of order one(AR(1))

二　画

二阶自回归过程	autoregressive process §10.3 of order two(AR(2))

三　画

下降支付	drop payment §3.7
下降系统	declining index system §5.7
下降结欠方法	declining balance method §8.5
与 i 有关的本金	exposure associated with i §5.5
上升支付	balloon payment §3.7

四　画

比较日期	comparison date §2.5
支付限额	payment cap §8.3
支付期	payment period §3.1
无息价格	flat price §7.5
无系统风险	unsystematic risk §10.4

无限期债券	perpetuals §7.2
无息票债券	zero coupon bond §7.2
专献债券组合	dedicated bond portfolio §9.10
专献	dedication §9.10
不记名债券	unregistered bonds §7.2
不限期信贷	open end credit §8.2
(美国) 中期国库券	Treasury notes §7.2
内返回率	internal rate of return §5.2
见票即付息债券	coupon bond §7.2
(美国) 长期国库券	Treasury bonds §7.2
币值加权利率	dollar —weighted rates §5.2 of interest
今后率	forward rate §9.6
分红	dividend §7.2
分红贴现模型	dividend discount model §7.10
分期偿还方法	amortization method §6.1
分期偿还表	amortization schedule §6.3
分期偿还债券	serial bonds §7.2
风险上溢	risk premium §9.5
风险年金	contingent annuity §3.1
风险和不确定性	risk and uncertainty §9.3
风险的市场价格	market price of risk §10.4
Makeham 公式	Makeham formula §7.3

五　画

平均交易利率	average transaction rate §9.7
平坦收益曲线	flat yield curve §9.6
正比例方法	direct ratio method §8.4

六 画

当前收益	current yield §7.3
当前率	current rate §9.1
年百分率	annual percentage rate §8.2
年收入	annual rent §4.4
年金	annuity §3.1
年数和方法	sum`of the years digits §8.5 method
优先股	preferred stock §7.2
价格	price §7.3
延期年金	deferred annuity §3.4
延付年金	annuity —immediate §2.4
自回归	autoregressive(AR) §10.3
负分期偿还	negative amortization §6.6
合众国规则	United States Rule §8.2
名义收益	nominal yield §7.3
交换	swaps §8.8
交割日	delivery date §8.8
收益曲线	yield curve §9.6
收益债券	income bond §7.2
收益率方法	yield rate method §5.8

七　画

违约力	force of default 第九章习题
杠杆作用	leverage §8.8
严格单利	exact simple interst §2.3
折扣分期	accumulation of discount §7.4
折耗	depletion §8.5
折耗费	depletion charges §8.5

八 画

78 规则	rule of 78 §8.4
表面利率	nominal rate of interest §9.4
"垃圾" 债券	"junk" bond §7.2
直线方法	straight line method §7.4
卖空	short sales §8.7
卖空交易	short transactions §8.7
担保抵押债券	collateralized mortgage§8.8 obligations(CMOs)
拆开国库券	stripped Treasuries §9.6
抵押返回证券	mortgage backed securities(MBS) §8.8
抵押债券	mortgage bond §7.2
抵押资产净值	equity §8.3
转帐日	settlement date §8.3
转移抵押	"wrapwround"mortgage §8.3
到期日	maturity date §7.2
到期收益	yield to maturity §7.3
到期期限	term to maturity §9.8
帐面下降	writing down §7.4
帐面上升	writing up §7.4
帐面值	book value §7.11
固定系统	fixed index system §5.7
固定资产	fixed assets §8.5
固定率抵押	fixed rate mortgage §8.3
固定率借贷	fixed rate loan §8.8
净现值方法	net present value method §5.8
迭代	iteration §2.7
Newton —Raphson 迭代法	Newton —Raphson iteration §3.8 method
货币市场基金	money market fund §2.8

货币交换 currency swap §8.8
金钱的时间值 time value of money §2.5
服务费 service §6.4
周期费 periodic charge §8.6
变额年金 varying annuity §4.6
净现值 net present value §5.2
单位时期 unit period §8.2
单位变化率 volatility §9.8
实现资本亏损 realized capital loss §7.11
实现资本盈利 realized capital gain §7.11
实践方法 practical method §7.5
居后率 ex post rates §9.2
居前利率 ex ante rates §9.2
限期信贷 closed end credit §8.2
限额 caps §8.3
参与优先股 participating preferred stock §7.2

九 画

项目投资率 project return rate §5.9
项目借贷率 project financing rate §5.9
标志率 index rate §8.3
政府政策 governmental policy §9.3
面值 par value §7.3
面额 face amount §7.3
持票人债券 bearer bond §7.2
持续期限 duration §9.8
Macauly 持续期限 Macauly duration §9.8
指定利率 specified rates §9.7

贴现资金流分析	discounted cash flow analysis §5.2
(联邦储备局) 贴现率	Discount rate §9.3
复利方法	compound interest method §8.5
复制交易	replicating transaction §10.6
复贴现方法	compound discount method §8.5
看涨期权	call §8.8
看跌期权	put §8.8
看跌期权 —看涨期权平价	put —call parity §10.5
修正息票率	modified coupon rate §7.3
修正持续期限	modified duration §9.8
保证	warrant §8.8
保证投资契约	guaranteed investment contracts(GICs) §8.8
信用风险	credit risk §9.5
信用债券	debenture bond §7.2
信息特性	quality of information §9.3
贷款最高限额	line of credit §8.8
衍生手段	derivative instruments §8.8
贸易商规则	Merchant's Rule §8.2
差额	spread §9.3
逆向年金抵押	reverse annuity mortgage §8.3
将来法	prospective method §6.2
结帐利率	settlement rate §9.7
绝对匹配	absolute matching §9.10

十　画

核定成本	capitalized cost §8.6
真实利率	real rate of interest §9.4

预付	advance §8.2
通知偿还债券	callable bond §7.2
通知偿还日	call date §7.7
通知偿还溢价	call premium §7.7
通货膨胀	inflation §9.3
通货膨胀上溢理论	inflation premium theory §9.6

十一画

理论方法	theoretical method §7.5
基本公式	basic formula §7.3
基本点	basis point §9.3
基价	base amount §7.3
基价公式	base amount formula §7.3
常规单利	ordinary simple interest §2.3
常数比例方法	constant ratio method §8.4
常数百分比方法	constant percentage method §8.5
唯一风险	unique risk §10.4
银行投资契约	bank investment §8.8 contract(BIC)
银行家规则	Banker's Rule §2.3
偿还日	redemption date §7.2
偿还价值	redemption value §7.3
偿债基金	sinking fund §6.4
偿债基金方法	sinking fund method §6.1
偿债基金表	sinking fund schedule §6.4
减值	depreciation §8.5
减值费	depreciation charge §8.5
减值资产	depreciating asset §8.5

渐进付款抵押	graduated payment mortgage §8.3
混合项目	mixed project §5.9
随机波动	random fluctuation §9.3

十二画

联邦基金利率	Federal funds rate §9.3
期权	option §8.8
Black —scholes	Black —Scholes Option §10.5
期权估价模型	Pricing Model
期货价格	futures price §8.8
期望现时值	expected present ralue(EPV) §9.5
期望理论	expectations theory §9.6
期望率	expected rate §9.4
期，期限	term §3.1
幅度	margin §8.3
嵌入期权	embedded option §10.5
确定年金	annuity —certain §3.1
滑动平均	moving average(MA) §10.3
最大收益方法	maximum yield method §8.4
最小收益方法	minimum yield method §8.4
最低贷款利率	prime rate §9.3
(美国) 短期国库券	Treasury bills §2.8
等时间方法	method of equated time §2.6

十三画

溢价分期	amortization of premium §7.4
溢价 / 折扣公式	premium/discount formula §7.3

新交易利率	New transaction rate §9.7

十四画

模拟	simulation §10.2
精算方法	actuarial method §8.2

十五画

增值资产	appreciating asset §8.5
潜在“净”利率	underlying“pure”rate §9.3 of interest
履行价格	exercise price §8.8

十六画

颠倒收益曲线	reverted yield curve §9.6

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" *Journal of Political Economy*, Vol. 81 (1973), 637-654.

[2] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. *Times Series Analysis* (Second Edition), San Francisco: Holden-Day (1976).

[3] Boyle, P.P. "Rates of Return as Random Variables" *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 43 (1976), 693-713.

[4] Boyle, P.P. "Immunization Under Stochastic Models of the Term Structure" *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 105 (1978), 177-187.

[5] Brealey, R.A.and Myers, S.C. *Principles of Corporate Finance* (Third Edition), New York : McGraw-Hill,Inc. (1988).

[6] Butcher, M.V. and Nesbitt, C.J. *Mathematics of Compound Interest*, Ann Arbor: Ulrich's Books, Inc. (1971)

[7] Butsic, R.P. "Determining the Proper Interest Rate for Loss Reserve Discounting: An Economic Approach" *Casualty Actuarial Society Call Papers*, (1988), 147-188.

[8] Clancy, R.P. "Options on Bonds and Applications to Produce Pricing" *Transcactions of the Society of Actuaries*Vol. 37 (1985), 97-130.

[9] Cox, J.C.; Ingersoll, J.E.; and Ross, S.A. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates" *Econometrica*Vol. 53.2 (1985), 385-407.

[10] Cox, J.C.; Ross, S.A.; and Rubinstein, M. "Option Pricing: A Simplified Approach" *Journal of Financial Economics*Vol. 7 (1979), 229-263.

[11] D'Arcy S.P. "Use of the CAPM to Discount Property-Liability Loss Reserves" *Journal of Risk and Insurance*Vol. 55 (1988), 481-491.

[12] Fen, A.M. "Interest Rate Futures: An Alternative to Traditional Immunization in the Financial Management of Guaranteed Investment Contracts" *Transactions of the Society of Actuaries*Vol. 37 (1985), 153-184.

[13] Ferguson, R.E. "Duration" *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*Vol. 70 (1983), 265-288.

[14] Fisher, I. *The Theory of Interest*,1930. Reprint. New York: Augustus M.Kelley, Publishers 1986.

[15] Ibbotson, R.G. and Sinquefield, R.A. "Stocks, Bonds, Bills and Inflation" *Ibbotson Associates Yearbook*, 1986.

[16] Jean, W.H. "On Multiple Rates of Return" *Journal of Finance* Vol. 23 (1968), 187-191.

[17] Jetton, M.F. "Interest Rate Scenarios" *Transactions of the Society of Actuaries*Vol. 40 (1988), 423-437.

[18] Kocherlakota, R.; Rosenbloom, E.S.; and Shiu, E.S.W. "Algorithms for Cash-Flow Matching" *Transactions of the Society of Actuaries* Vol. 40 (1988), 477-484.

[19] Kolb, R.W. *Options: An Introduction* Miami: Kolb Publishing Co., (1991).

[20] Macaulay, F.R. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856*, New York: National Bureau of Economic Research, 1938.

[21] McCutcheon, J.J. and Scott, W.F. *An Introduction to the Mathematics of Finance* Heinemaan: London, 1986.

[22] Milgrom, P.R. "Measuring the Interest Rate Risk" *Actu-*

aries Vol. 37 (1985), 241-257.

[23] Miller, R.B. and Wichern, D.W. *Intermediate Business Statistics* New York: Holl Rinehart and Winston, 1977.

[24] Panjer, H.H. and Bellhouse, D.R. "Stochastic Modelling of Interest Rates With Applications to Life Contingencies" *Journal of Risk and Insurance* Vol. 47 (1980), 91-110.

[25] Panjer, H.H. and Bellhouse, D.R. "Stochastic Modelling of Interest Rates With Applications to Life Contingencies - Part II," *Journal of Risk and Insurance*Vol. 48 (1981), 628-637.

[26] Pedersen, H.W.; Shiu, E.S.W.; and Thorlacius, A.E. "Arbitrage-Free Pricing of Interest-Rate Contingent Claims" *Transactions of the Society of Actuaries*Vol. 41 (1989).

[27] Promislow, S.D. " A New Approach to the Theory of Interest" *Transactions of the Society of Actuaries*Vol. 32 (1980), 53-92.

[28] Redington, F.M. "Review of the Principles of Life-Office Valuations" *Journal of the Institute of Actuaries*Vol. 78 (1952), 286-315.

[29] Ross, S.A. "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" *Journal of Economic Theory*Vol. 13 (1976), 341-360.

[30] Spence, B.M.; Graudenz, J.Y.; Lynch, J.J. *Jr. Standard Securities Calculation Methods.* New York: Securities Industry Association, 1973.

[31] Teichroew, D; Robichek, A.A.; and Montalbano, M. "Mathematical Analysis of Rates of Return Under Certainty" *Management Science* Vol. 11 (January, 1965), 395-403.

[32] Teichroew, D; Robicheck, A.A.; and Montalbano, M. "An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions Under Certainty" *Management Science*Vol. 12 (November, 1965), 151-179.

[33] Tilley, J.A. "The Matching of Assets and Liabitities" *Transctions of the Society of Actuaries*Vol. 32 (1980), 263-300.

[34] Vanderhoof, I.T. "The Interest Rate Assumption and the Maturity Structure of the Assets of a Life Insurance Company" *Transactions of the Society of Actuaries*Vol. 24 (1972), 157-192.

译者的话

本书译自 S.G.Kellison 所著 The Theory of Interest 一书第二版，原书于 1991 年由 Richard D.Irwin,Inc.,Irwin —Dorsey limited 出版。

S.G.Kellison 的这部著作，在北美金融保险界有较大影响，长期被北美精算师学会 (Society of Actuaries) 推荐为 A.S.A. 考试中复利数学这门课的主要阅读教材。该书的第一版限于利息的数学理论，而且基本上是把利息作为确定性的对象加以处理的。第二版则在第一版的基础上作了较多的修改和补充，主要有以下几方面：

1. 不仅讲述利息的数学理论，而且也介绍了利息的经济与金融理论。书中讨论了通货膨胀、风险及不确定性等因素对利息的影响，还介绍了一些现代金融手段。另外，书中对资产和负债的分析和处理也涉及了现代金融保险业中十分关心的一个问题。

2. 虽然本书中大部分章节仍将利息作为确定性的对象加以处理，但已辟出了一定的篇幅 (特别是第十章) 介绍利息的随机处理。书中对资产估价模型等的讨论在其他书籍中不易见到。

3. 第一版中已涉及的若干论题在第二版中作了更为广泛和深入的讨论，如收益率、再投资率、贴现资金流分析、资金预算、贷款的分期偿还、借贷忠诚等等。此外，第二版中对问题的数学处理也比第一版更为现代化。

出于对国内读者实际情况和需要的估计，我们在翻译本书的过程中删去了第十章中的后三节和几个附录。有些地方 (包括个别习题答案) 根据我们的判断作了订正。附录 1 的复利函数表由研究生陈尉华自编程序计算。本书文稿的打印和排版承陈尉华和

蔡志杰二位通力合作，才得以完成，谨此致谢。

对于本书翻译中可能存在的问题，敬请广大读者提出意见，以利改进。

尚汉冀
1995 年 9 月